Gestion de risques et construction de portefeuille

Cours M2 ISF
2019-20

Site www : google « Gabriel Turinici » /cours/ …

Exemple de produits dérivés: contrats forward

- Achat d'une maison
- Prix en janv. de l'année T: M=1'000'000 EUR
- Achat sera effectué en Janv. T+1 au prix P
- Taux d'intérêt sans risque: r=5%

Quel est le prix P acceptable pour les deux parties ?

Exemple de produits dérivés: contrats forward

a/ si P > 1’050’000 (M* (1+r)) alors l’acheteur préfère s’endetter tout de suite et acheter maintenant

b/ si P < 1’050’000 (M* (1+r)) alors le vendeur préfère vendre tout de suite

Exemple de produits dérivés: contrats forward

a/ si P > 1’050’000 (M* (1+r)) alors l’acheteur préfère s’endetter tout de suite et acheter maintenant

b/ si P < 1’050’000 (M* (1+r)) alors le vendeur préfère vendre tout de suite

Le prix de la transaction P = M*(1+r)

Conclusion: le prix d’un forward/future sur un actif S est

$$F_t(S,T) = S_t\, e^{r(T-t)}$$

Principes de valuation

Absence d’arbitrage: il n’est pas possible de gagner de l’argent sans risque, c’est-à-dire

il n’y a pas moyen d’être surs de gagner de l’argent avec un investissement initial zéro.

(hypothèse d’absence d’opportunité d’arbitrage)

Principes de valuation

Proposition: soit deux stratégies S1 et S2. Alors si à un instant futur T, S1=S2 en tout état du monde alors S1=S2 pour tout temps t<T.

Principes de valuation

Proposition: soit deux stratégies S1 et S2. Alors si à un instant futur T, S1=S2 en tout état du monde alors S1=S2 pour tout temps t<T.

si $S_1(t) > S_2(t)$

Démonstration: effectivement sinon il y aurait un arbitrage en vendant le plus cher et achetant le moins cher.

$(S_1^{(t)} - S_2^{(t)}) e^{r(T-t)} - \cancel{S_1(T)} + \cancel{S_2(T)}$

	S_1	S_2	Euros
t	-1	$+1$	$S_1 - S_2$
T^-	-1	$+1$	$(S_1 - S_2) e^{r(T-t)}$
T	0	0	

Hedging statique: contrat fwd

stratégie S_1 = le contrat future / fwd de prix P

Stratégie S_2 = le portefeuille suivant en $t=0$

→ emprunt de S_0 euros au taux r pour remboursement en $t=T$

→ achat de l'actif $S_{t=0}$ au prix S_0

Valeur en $t=T$
- S_1 : 1 actif S_T − P euros
- S_2 : 1 actif S_T − $S_0 e^{rT}$

Principes de valuation: hedging statique d'un future/forward

Valeur de $S_1 - S_2$ en $t=0$: zéro

Valeur de $S_1 - S_2$ en $t=T$: $S_0 e^{rT} - P$

$S_2 - S_1$ en $t=T$: $P - S_0 e^{rT}$ ‖ pas aléatoire

Donc $\underline{\underline{S_0 e^{rT} = P}}$

<u>Exo</u> prix d'un fwd avec dividendes D_i à $t=t_i$ sera $S_0 e^{rT} - \sum_{t_i \leq T} D_i e^{r(T-t_i)}$

Options

<u>Définition:</u> un call européen de maturité T et strike K est le droit d'acheter l'actif S au prix K à l'instant T.

Vocabulaire:

utilisation du droit = exercice

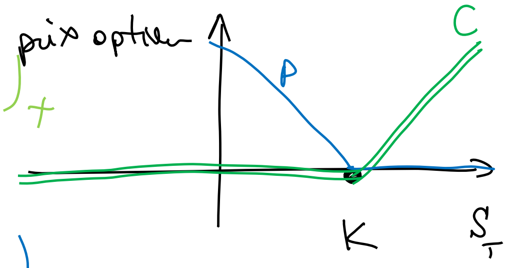
options put = option de vente

options américaines = exercice possible à tout moment avant T.

Options: prix

Prix d'une option: par la NA (non-arbitrage) le prix à l'instant final t=T

→ call $C(S,T)=(S_T-K)_+$



→ put $P(S,T)=(S_T-K)_-$

ex $K=100$ $S_T=80$

Options

Prix d'une option pour t<T : en général il est inconnu !

Il faut un modèle.

Outils mathématiques: rappels

- mouvement brownien
- intégrale Ito
- équations différentielles stochastiques
- formule d’Itô.

Hedging statique: parité call-put

Prix d’une option pour $t<T$: en général il est inconnu !

Il faut un modèle.

Certaines relations existent: parité call-put

Hedging statique: parité call-put

Prix d'une option pour t<T : en général il est inconnu !

Il faut un modèle.

Certaines relations existent: parité call-put

Π_t : +1 put P_t sur S_t (K,T) (long 1 put)

−1 call C_t sur S_t (K,T) (short 1 call)

+1 actif S_t (long 1 S_t)

Valeur en $t=T$ $\quad \Pi_T = (S_T-K)_- - (S_T-K)_+ + S_T = K$

Donc valeur en $t<T$ $\quad \Pi_t = K e^{-r(T-t)}$

Hedging statique: parité call-put

$$\Pi_t = K e^{-r(T-t)} \Rightarrow$$

$$P_t - C_t + S_t = K e^{-r(T-t)} \Rightarrow$$

$$\boxed{P_t = C_t - S_t + K e^{-r(T-t)}}$$

relation de parité call-put

Portefeuille auto-financé

Quantités : $\theta_t^0, \theta_t^1, \dots, \theta_t^N$ Actifs : $S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^N$

Convention : S_t^0 = actif ss risque : $\frac{dS_t^0}{S_t^0} = r\,dt$, taux ss risque

Valeur $\Pi_t = \theta_t \cdot S_t = \sum_{k=0}^{N} \theta_t^k \, S_t^k$

<u>Déf</u> Le portefeuille est dit auto-financé s'il n'y a pas ajout d'argent (entre 0 et T).

<u>Exemple</u>

Donnée $S_{2007} = 100$

$S_{2008} = 120$

	cash 5%	actif S
2007	10000 €	100 actifs de prix 100 €
2008	10500 €	100 actifs de prix 120 €
2008	4500 €	150 actif de prix 120 €

aucune autre valeur possible si redistribution 1 fois par an

Portefeuille auto-financé

La redistribution faite en "t+1" au prix S_{t+1} entraîne

$$\theta_t \cdot S_{t+1} = \theta_{t+1} \cdot S_{t+1}$$

Donc $\Pi_{t+1} - \Pi_t = \theta_{t+1} \cdot S_{t+1} - \theta_t \cdot S_t = \theta_t \cdot (S_{t+1} - S_t)$

$$\Pi_T = \Pi_0 + \sum_{t=1}^{T-1} \Pi_{t+1} - \Pi_t = \Pi_0 + \sum_{t=1}^{T-1} \theta_t \cdot (S_{t+1} - S_t)$$

Par passage à la limite on obtient l'intégrale d'Ito :

$$\Pi_T = \Pi_0 + \int_0^T \theta_t \, dS_t \qquad d\Pi_t = \theta_t \cdot dS_t$$

<u>Rq</u> si on avait $\Pi_{t+1} - \Pi_t = \theta_{t+1/2} \cdot (S_{t+1} - S_t)$ on obtiendrait Stratonovich.

Rappel $\Pi_t = \theta_t \cdot S_t$

Portefeuille auto-financé

Déf Un portefeuille est auto-financé si $\Pi_t = \Pi_0 + \int_0^t \theta_t \cdot dS_t$

ou encore $d\Pi_t = \theta_t \cdot dS_t$

Rq θ_t est pris "prédictible" (mesurable p/r à la σ-algèbre générée par les processus adaptés continues à gauche).

On dira, pour $Z = \theta_T \cdot S_T$ que θ_t finance Z.

Portefeuille auto-financé: changement de numéraire

Soit R_t un processus tel que $R_t > 0$ p.s. i.e. un numéraire,

Exemple monnaie de tenue de compte eur/FR eur/USD, ...

Prop Un portefeuille auto-financé le reste après cgt de numéraire

Dém cgt de numéraire $\theta_t \to \theta_t$ $\tilde{S}_t = S_t / R_t$

$$\tilde{\Pi}_{t+1} - \tilde{\Pi}_t = \theta_{t+1} \frac{S_{t+1}}{R_{t+1}} - \theta_t \frac{S_t}{R_t} = \theta_t \frac{S_{t+1}}{R_{t+1}} - \theta_t \frac{S_t}{R_t} \quad \checkmark$$

$$\theta_{t+1} \cdot \frac{S_{t+1}}{R_{t+1}} = \theta_t S_{t+1} / R_{t+1} \qquad \theta_t (\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t)$$

Portefeuille auto-financé

<u>Lemme</u> Tout portefeuille peut être rendu auto-financé en rajoutant de l'actif ss risque

<u>Dém</u> on rajoute $\tilde{\theta}^0_t$ de l'actif ss risque $\tilde{\Pi}_t = \Pi_t + \tilde{\theta}^0_t \cdot S^0_t$

Alors $d\tilde{\Pi}_t = d\Pi_t + d(\tilde{\theta}^0_t S^0_t) = d\Pi_t + (d\tilde{\theta}^0_t)S^0_t + \tilde{\theta}^0_t(dS^0_t)$

(par Ito car $dS^0_t = rS^0_t dt$!) (on veut $d\tilde{\Pi}_t = (\theta_t + \tilde{\theta}^0_t) \cdot dS_t$

Il suffit de prendre $\tilde{\theta}^0_t$ solution de

$$\theta_t \cdot dS_t + \cancel{\tilde{\theta}^0_t dS^0_t} = d\Pi_t + (d\tilde{\theta}^0_t)S^0_t + \cancel{\tilde{\theta}^0_t dS^0_t}$$

$$\Rightarrow \quad d\tilde{\theta}^0_t = \frac{\theta_t \cdot dS_t - d\Pi_t}{S^0_t} \qquad \text{sol} \quad \tilde{\theta}^0_t = \int_0^t \frac{\theta_u}{S^0_u} dS_u - \int_0^t \frac{d\Pi_u}{S^0_u}$$

Modèle pour l'évolution d'un actif financier

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \underset{\text{volatilité}}{\sigma} dW_t \quad : \text{action}$$

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \quad : \text{taux} \quad \text{(Vasicek '77)}$$

$10 \longrightarrow 15$

$200 \longrightarrow 300$

$$\frac{15-10}{10} = 50\%$$

Delta-hedging pour les options

Prix de l'option (ex call) $C(t, S_t)$.

On sait $C(T, S_T) = (S_T - K)_+$

Portefeuille auto-financé $\Pi_t : \begin{cases} 1 \text{ call} \\ \Delta_t \text{ parts de } S_t \\ \dots \text{ actif ss risque} \end{cases}$

partie ss risque

$d\Pi_t = 1 \cdot dC_t + \Delta_t \, dS_t + \dots$

$= \frac{\partial C}{\partial t} dt + \cancel{\frac{\partial C}{\partial S} dS_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt + \cancel{\Delta_t dS_t} + \dots$

Ito

$\Delta_t = -\partial C_t / \partial S_t$ $\quad \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt$ ← évolution dét.

Donc $d\Pi_t$ suit une évolution déterministe. La seule possible est $d\Pi_t = r \, \Pi_t \, dt$.

Donc $\underline{\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2} = r \Pi_t = \underline{r \left[C_t - \frac{\partial C}{\partial S} S_t \right]}$

Equation Black Scholes

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + r S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - r C = 0 \\ C(T, S) = (S - K)_+ \end{cases}$$

← eq Black-Scholes

← pour 1 call européen

$(S - K)_-$ ← pour 1 put européen

Ex C = option sur 2 sous-jacents de pay-off $f(S^1, S^2)$.

Eq d'évolution $\frac{dS^1_t}{S^1_t} = \mu_1 dt + \sigma_1 dW^1_t$ $\quad \frac{dS^2_t}{S^2_t} = \mu_2 dt + \sigma_2 dW^2_t$

$dW^1_t \cdot dW^2_t = \rho \, dt$

Ex $f(S^1, S^2) = (\eta_1 S_1 + \eta_2 S_2 - K)_+$

Ref Hull "Option, futures ..." pour formule explicite pour $\sigma = cst$, $r = cst$.

Neutralité par rapport au risque

Exemples de risques: en bourse (aversion), au loto-casino (propension).

Idée: combien sommes nous prêts à payer pour jouer à un jeu qui offre, e.g. 50% chances de gagner 100 eur et 50% de rien gagner ?

Neutralité par rapport au risque: outils mathématiques

Thm (Girsanov) Soit le processus L_t donné par

$L_t = \exp\left(\int_0^t h_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s) ds \right)$ où h_s est un processus adapté borné. Alors L_t est l'unique solution de $\frac{dL_t}{L_t} = h_t dW_t$ avec $L_0 = 1$ et $\mathbb{E}(L_t) = 1$. De plus L_t est une martingale.

On introduit la mesure $Q(A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A L_T)$. Sous cette mesure le processus $\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t h(s) ds$ est un mvt brownien.

Rq On obtient $d\tilde{W}_t = dW_t - h\, dt$

Valuation d'option par la probabilité risque neutre

$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dW_t$ Δ- hedging pour une option C_t de pay-off $h(S_T)$.

On suppose qu'il est possible de repliquer C_t avec ↗ actifs ss risque ↘ du ss jacent.

↓

hypothèse de marché complet.

Donc si η_t = quantité d'actif ss risque R_t : $\frac{dR_t}{R_t} = r\, dt$

Δ_t = quantité de ss jacent S_t

$C_t = \eta_t R_t + \Delta_t S_t$. $\quad dC_t = \eta_t dR_t + \Delta_t dS_t$

On prend ds Girsanov ce qu'il faut $\left(h_t = -\frac{\mu - r}{\sigma} \right)$ pour que

$d\tilde{W}_t = dW_t - h\, dt$ et $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t = \mu dt + \sigma(d\tilde{W}_t + h dt)$

$= r dt + \sigma d\tilde{W}_t$

Valuation d'option par la probabilité risque neutre

$dC_t = \eta_t dR_t + \Delta_t dS_t = \underline{\eta_t r R_t dt + \Delta_t S_t (r dt} + \sigma d\tilde{W}_t)$

$dC_t = r C_t dt + \Delta_t S_t \sigma d\tilde{W}_t$

Soit $\tilde{C}_t = \frac{C_t}{R_t}$ alors $d\tilde{C}_t = d\left(\frac{C_t}{R_t}\right) = \cancel{0 \cdot dt} + \frac{\Delta_t S_t \sigma}{R_t} d\tilde{W}_t$

Donc $\frac{C_t}{R_t}$ = martingale en particulier $\frac{C_t}{R_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{C_T}{R_T} \middle| \mathcal{F}_t \right)$

mesure risque-neutre

Donc $\begin{cases} \underline{C_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(C_T e^{-\int_t^T r(s) ds} \mid S_t = \text{valeur de } S \text{ à l'instant } t \right)} \\ \text{équation pour } S : \frac{dS_t}{S_t} = r\, dt + \sigma d\tilde{W}_t \end{cases}$

↓

évaluation par Monte-Carlo

Rq $C_T = h(S_T)$ = fonction connue.

Rq $\tilde{S}_t = S_t / R_t$ satisfait $\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = \sigma d\tilde{W}_t$.

Valuation pour options américaines

1/ Call européen / call américain

Parité $P_t = C_t - S_t + Ke^{-r(T-t)} \Rightarrow C_t = \underbrace{P_t}_{\geq 0} + S_t - Ke^{-r(T-t)}$

$\geq S_t - Ke^{-r(T-t)} \geq \underbrace{S_t - K}_{\text{gain si exercice à } t \leq T \text{ (si } S_t > K)}$

Donc il n'est jamais optimal d'exercer un call (au pire il y aura une vente du call sur le marché).

Valuation options américaines: arbitrage

r ≥ 0 : c'est portef d'arbitrage si $C_t^A > C_t^E$

Cas particulier portef K euros

Short 1 S_t

long 1 C_t (europ.)

Bilan en T : a) si $S_T > K$

$$Ke^{r(T-t)} - S_T + S_T - K$$

$$= K\left(e^{r(T-t)} - 1\right) \geq 0$$

b) si $S_T \leq K$: $Ke^{r(T-t)} - S_T + 0 \geq$

$$\geq Ke^{r(T-t)} - K \geq 0.$$

couverture

→ on est vendeur (en $t=0$) d'une option américaine au prix d'une option européenne
C_t^A $C_t^E = C_t$

→ l'acheteur l'exerce à $t < T$ (bien sur $C_t > S_t - K$)

→ (nous avons "hedgé" C_t)

Marche à suivre

1/ on vend 1 option européenne | américaine au prix C_t car $C_t^A \geqslant C_t$

2/ on achete S_t qu'on livre au prix K

Bilan avant : short 1 call américain

après : short 1 call américain + $\underbrace{C_t - S_t + K}_{> 0}$

Donc des call américains ne sont jamais exercés donc
$C_t^A = C_t^E$.

Put américain

$$P_t = \underbrace{C_t}_{\geqslant 0} - S_t + K e^{-r(T-t)} \geqslant K e^{-r(T-t)} - S_t \leq (K - S_t)_+$$

Gain d'exercice : $(K - S_t)_+ \geqslant K e^{-r(T-t)} - S_t$

(si $K \geqslant S_t$)

Donc il peut être optimal d'exercer un put américain.

Pour 1 put américain le prix P_t^A doit être $\geqslant (K - S_t)_+$

donc $P_t^A \neq P_t^E$ (en général).

Analyse du portefeuille de replication

Π_t : 1 option (put) et Δ_t parts de S_t

Si $d\Pi_t > r\,\Pi_t\,dt$ donc on demande de l'argent (Π_t) au taux r et on finance le portefeuille Π_t

Put américain

Rq : Π_t est sous notre contrôle car c'est l'acheteur qui décide si oui ou non il exerce.

Conclusion : il n'est pas possible que $d\Pi_t > r\Pi_t\,dt$, donc $d\Pi_t \leq r\Pi_t\,dt$.

Tentative d'arbitrage pour $d\Pi_t < r\Pi_t\,dt$: il faudrait vendre le portefeuille Π_t et le mettre à la banque (taux "r"). Cette opération n'a pas de résultat connu si $P_t^A <$ gain d'exercice

Conclusion • si exercice $P_t^A >$ gain d'exercice donc en gén $P_t^A \geqslant$ gain d'exercice

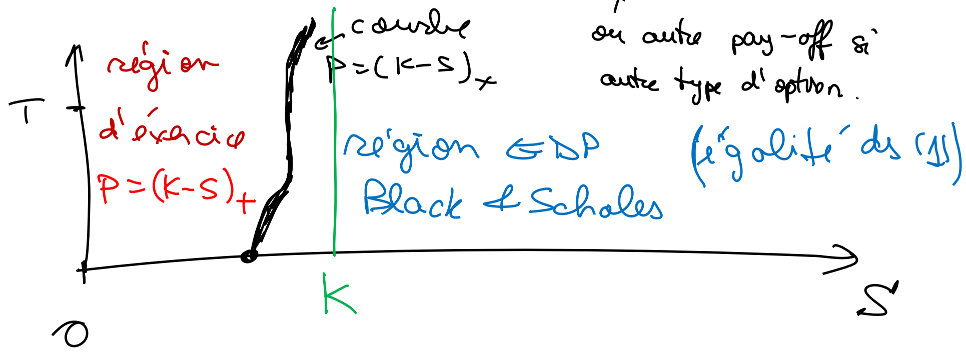
• toujours $d\Pi_t \leq r\Pi_t\,dt$

Black-Scholes pour put américain

$P(t,S) =$ prix d'un put américain satisfait

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_t}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\dfrac{\partial P}{\partial S} - rP \leq 0 \quad \forall t, S \quad (1) \\ \text{si inégalité stricte alors } P(t,S) = (K-S)_+ \end{cases}$$

ou autre pay-off si autre type d'option.



Options digitales

Exemples

call ① connu

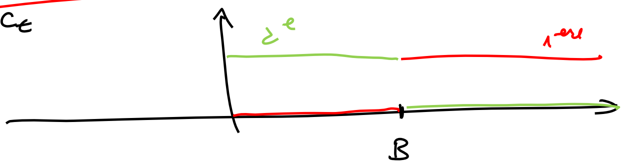
$$\text{Pay-off} = \begin{cases} 0 & \text{si } S_T < B \\ 100 & \text{si } S_T \geq B \end{cases}$$

C_t

put ② ou

$$\begin{cases} 0 & \text{si } S_T \geq B \\ 100 € & \text{si } S_T < B \end{cases}$$

P_t



$$C_T + P_T = 100$$

$$C_t + P_t = 100\, e^{-r(T-t)}$$