$$1 = \Pi^T \mathbb{1} = \frac{1}{2\lambda}\left[\Sigma^{-1}(\mu - \eta \mathbb{1})\right]^T \cdot \mathbb{1}$$

$$= \frac{1}{2\lambda}(\mu - \eta\mathbb{1})^T(\Sigma^{-1})^T\mathbb{1} = \frac{1}{2\lambda}\left[\mu^T\Sigma^{-1}\mathbb{1} - \eta\mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}\right]$$

Donc

$$1 = \frac{1}{2\lambda}\left[b - \eta a\right] \Rightarrow b - \eta a = 2\lambda \Rightarrow \eta = \frac{b - 2\lambda}{a}.$$

Rq $\underbrace{\Sigma = \Sigma^T}$ $\Rightarrow \underbrace{\Sigma^{-1}}_{X} = (\Sigma^{-1})^T$. $X\Sigma = Id = \Sigma X$

Sol Ex Thm 2 fonds

$$\Pi(\sigma) = \frac{\sigma \Sigma^{-1}(\mu - r^0\mathbb{1})}{\|\mu - r^0\mathbb{1}\|_{\Sigma^{-1}}} \Rightarrow \xi\,\Pi(\sigma) = \Sigma^{-1}(\mu - r^0\mathbb{1})$$

$= \xi$

$$\Rightarrow \xi\,\Sigma\,\Pi(\sigma) = \mu - r^0\mathbb{1}$$

$$\Pi(\sigma) = \begin{pmatrix} 350/1000 \\ 350/1000 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(\xi \cdot c)}_{cst}\ \underbrace{\Sigma\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 15.5\% - r^0 \\ 9.48\% - r^0 \end{pmatrix}$$

pas connues

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{12} + \Sigma_{11} \\ \Sigma_{12} + \Sigma_{22} \end{pmatrix} = cst\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2(15.5\% - r^0) \\ c_2(9.48\% - r^0) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\Sigma_{12} + \Sigma_{11}}{\Sigma_{12} + \Sigma_{22}} = \frac{15{,}5\% - r^0}{9{,}48\% - r^0} \qquad \Sigma_{12} = \ldots$$

$\Rightarrow R_0 = \ldots$

Prix de future avec dividendes à l'instant t, maturité T

$$\boxed{F_t(T) = S_t e^{r(T-t)} - \sum_{t \le t_i \le T} D_i e^{r(T-t_i)}}$$

Preuve Soit la stratégie : acheter l'actif S_t, signer le contrat future en tant que vendeur

Valeur en T : dette $\left(-S_t e^{r(T-t)}\right)$ à la banque

→ 1 actif à livrer : ϕ actifs restants

→ encaissement des dividendes $+\sum_{t_i \le T} D_i e^{r(T-t_i)}$

→ encaiss^t du prix $+F_t(T)$

Total investiss^t initial $= 0$

valeur finale $F_t(T) - S_t e^{r(T-t)}$

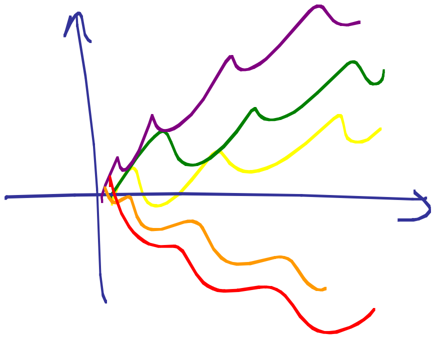
$+ \sum_{t_i \le T} D_i e^{r(T-t_i)}$ qui doit être nulle.

Donc $F_t(T) = S_t e^{r(T-t)} - \sum_{t_i \le T} D_i e^{r(T-t_i)}$

Hedging options & trading vol

$$W_{t+\Delta t} - W_t = \mathcal{N}(0, \Delta t)$$

$$W_{n\cdot\Delta t} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{N}(0, \Delta t).$$



$$\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} = \mu \Delta t + \sigma \left(W_{t+\Delta t} - W_t \right) \qquad \frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dW_t$$

↳ Euler-Maruyama de l'EDS

$$S_{(n+1)\Delta t} = S_{n\cdot\Delta t}\left(1 + \mu\cdot\Delta t + \sigma \mathcal{N}(0, \Delta t)\right) = \dots \left(\dots\dots \sigma\sqrt{\Delta t}\, \mathcal{N}(0,1)\right)$$

sol analytique $S_t = e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}$.

sous la proba dite historique.

Evaluation Monte-Carlo du prix

Se fait sous la proba risque neutre

$$S_{(n+1)\Delta t} = S_{n\cdot\Delta t}\left(1 + r\cdot\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\, \mathcal{N}(0,1)\right).$$

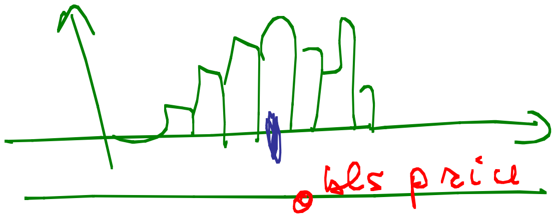
$$S_t = S_0\, e^{(r - \sigma^2/2)t + \sigma W_t} \qquad W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$$

Prix du ex call = moyenne empirique (somme sur les "M" réalisations) de prix $(S_T - K)_+$ fois actualisation $e^{-r(T-t)}$.

Pour $\mu, r, \sigma = cst$ il existent des formules analytiques pour prix call, put, etc.

Ex bls price (. . . - - -) $S_t, K, r, \sigma, T-t, \delta$
bls delta (. - -)

<u>A FAIRE</u> Vérifier les formules avec la version Monte-Carlo.



2^e tâche : Δ-hedging :

Simulation du résultat financier d'un vendeur d'option qui hedge avec modèle B-S.

3 comptes : cash $\longrightarrow$ s'apprécie avec tx r. payer le hedging

-1 option C_t $\longrightarrow$ vendue (0), livrée (T)

Δ_t parts de S_t $\longrightarrow$ ajustement avec B&S blsdelta.py

$$\text{cash}((n+1)\Delta t) = \text{cash}(n \cdot \Delta t) \cdot (1 + r \cdot \Delta t).$$

<u>t=0</u>
$\text{cash} = C(S_0, K, r, T, \sigma)$. (vente)
$\Delta_0 =$ blsdelta (....)
$\text{cash} = \text{cash} - \Delta_0 \cdot S_0$

evolution "historique" (utilisé pour calcul "blsdelta").

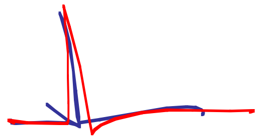
$t \to t+h$
calcul de S_{t+h}
calcul de $\Delta_{t+h} - \Delta_t$
$\text{cash} = \text{cash} \cdot (1 + h \cdot \Delta t)$ (capitalisation)
$\text{cash} = \text{cash} - (\Delta_{t+h} - \Delta_t) \cdot S_{t+h}$

$T-h \to T$ capitalisation . . . . . .

T : livraison : cash = cash $- (S_T - K)_+$

vente du portef de Δ-hedging cash = cash + $\Delta_T \cdot S_T$

A FAIRE Plot : hist (cash).

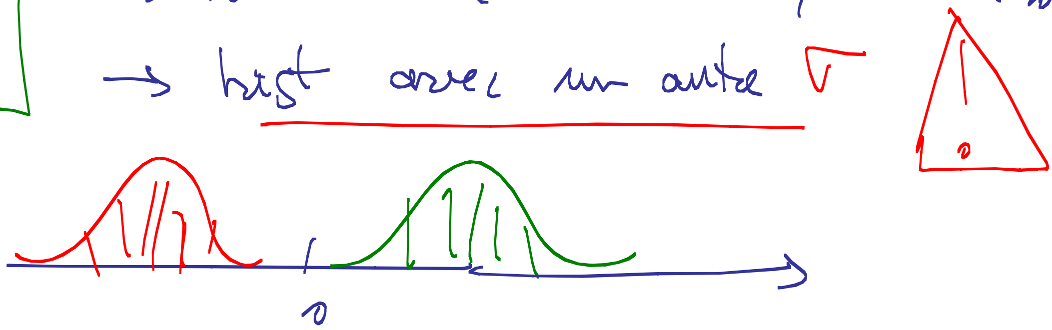


cash = matrice tps × realisations

$(N+1) \times M$.

A FAIRE → hist avec un autre μ. 15% + 5%.

→ hist avec un autre σ



Trading de volatilité

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma^r dW_t$$

$\mathcal{E}_S$ B&S

$$\partial_t C + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_{SS} C + \underbrace{rS\partial_S C}_{\Delta} - rC = 0$$

$\sigma_e \simeq \sigma^r$

$$\Theta^e + \frac{1}{2}\sigma_e^2 S^2 \Gamma^e + rS\Delta_e - rC_e = 0$$

"thêta" "gamma" "delta"

calcul de l'évolution du portef de Δ-hedging

- -1 call $C^e(t, S_t)$
- Δ_t^e parts de S_t
- cash (actif ss risque) $= \Pi_t - \Delta_t^e \cdot S_t + C_t^e$

$d\Pi_t \ \dfrac{\Pi_t = \text{autofinancé}}{} \ (-1)\, dC^e + \Delta_t^e\, dS_t +$

$$r(\underbrace{\Pi_t - \Delta^e_t S_t - c^e_t}_{\text{cash}})\,dt$$

$$dc^e(t,S_t) = \partial_t c^e(t,S_t)\,dt + \partial_S c^e(t,S_t)\,dS_t + \frac{1}{2}\sigma_r^2 S_t^2\,\partial_{SS} c^e(t,S_t)\,dt$$

$$= \underbrace{-\Theta^e}\,dt - \cancel{\Delta^e\,dS_t} - \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_r^2 S_t^2\,\Pi^e}\,dt + \cancel{\Delta^e_t\,dS_t} + r(\Pi_t - \underbrace{\Delta^e_t S_t} + c^e_t)\,dt$$

$$= \left[r\Pi_t + \frac{1}{2}(\sigma_e^2 - \sigma_r^2)S_t^2\,\Pi^e\right]dt$$

$$\tilde{\Pi} = \underbrace{\Pi e^{-rt}} \qquad d\tilde{\Pi}_t = \{\ 0 + \frac{1}{2}(\sigma_0^2 - \sigma_r^2)S_t^2\,\Pi^e\ \}\,dt$$

$\text{cst}(t)$

$$d\tilde{\Pi}_t = d\Pi_t\,e^{-rt} - r e^{-rt}\Pi_t \ \ldots$$

A faire TP : implementation.

Stratégies dynamiques de portefeuille

$\Sigma, R \to$ allocation (statique) à horizon et risques définies.

! ! ? ? Black-Litterman ... (a priori).

$\hookrightarrow \mu$ stat directionnelles "à regime"

CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance).

V_t = portefeuille, P_t = plancher $P_t < V_0 e^{rt}$ $\forall t$.

partie à ne pas perdre $\begin{cases} P_t = P_0 \\ P_t = P_0 e^{rt} \end{cases}$

Coussin $C_t = V_t - P_t \geq 0$ à investir

→ Investiss^t risqué $X_t = m\, C_t$ m = cst, fixée. $m > 1$ multiplicateur

ex $m = 5$.

→ ss risque M_t (monétaire) $M_t = V_t - X_t$.

Ex $m = 5$ $V_0 = 100$, $P_0 = 90$ $r = 0$ $P_t = P_0 e^{rt}$

Scénario # 1 $S_0 = 100$, $S_1 = 95$, $S_2 = 90$

$\boxed{t=0}$ $C_0 = V_0 - P_0 = 100 - 90 = 10$

$X_0 = m \cdot C_0 = 50€$ $M_0 = 100 - 50 = 50€$

$\boxed{t=1}$ $V_1 = M_1 + X_1 = M_0 e^{0.1} + X_0 \cdot \frac{S_1}{S_0} = 97{,}5$

$P_1 = P_0 e^{0 \cdot 1} = 90$ $C_1 = \underset{V_1 - P_1}{97{,}5 - 90} = 7.5$

$X_{1^+} = m\, C_1 = 5 \cdot 7{,}5 = 37{,}5$ $M_{1^+} = V_1 - X_{1^+} =$

$\boxed{t=2}$ $V_2 = M_2 + V_2 = \underbrace{M_1 e^{0.1}}_{60} + X_1 \frac{S_2}{S_1} = 60 + 37{,}5 \cdot \frac{90}{95} =$

$60 + 35{,}5 = 95{,}5$.

$P_2 = 90$.

Scénario 2 $100 \to 110 \to 120$

$\boxed{t=0}$ pareil

$\boxed{t=1}$ $V_1 = M_0 e^{0.1} + X_0 \cdot \frac{S_1}{S_0} = 50 + 50 \cdot \frac{110}{100} = 105$

$P_1 = 90 \qquad C_1 = V_1 - P_1 = 105 - 90 = 15$

$X_{1+} = 5 \times C_1 = 5 \times 15 = 75$

$M_{1+} = 105 - 75 = 30$

$\boxed{t=2}$ $\quad V_2 = M_2 + X_2 = 30 \cdot e^{0.1} + \underbrace{X_{1+} \cdot \frac{S_2}{S_1}}_{75 \cdot \frac{120}{110}} = 30 + 90 = 111{,}8$

Scénario 3 $\quad 100 \to 110 \to 80$

✓ ✓

$\boxed{t=2}$ $\quad V_2 = M_2 + X_2 = 30\, e^{0.1} + X_{1+} \frac{S_2}{S_1} = 30 + 75 \cdot \frac{80}{110}$

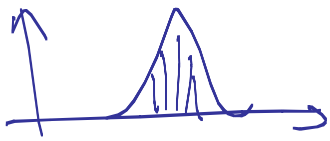
$= 84{,}5 < P_2 = 90$!!

Pour respecter le plancher (avec $m > 1$) il faut réallouer souvent avec un marché supposé continu.

Il y a un actif virtuel C_t $\qquad V_t = P_t + C_t$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dW_t \quad \text{(Black-Scholes)}$$

TP $\quad Rdt = \frac{C(t+\delta t) - C(t)}{C(t)}$



Gaussien

$dC_t = ?$ $\qquad V_t = P_t + C_t$ $\qquad dP_t = r P_t\, dt$

port. auto-financé $\to M_t$, $\to X_t$

$$dV_t = M_t\, r\, dt + \frac{X_t}{S_t} dS_t = (V_t - m C_t)\, r\, dt + m C_t \frac{dS_t}{S_t}$$

$X_t = m\, C_t \qquad M_t = V_t - X_t = V_t - m\, C_t$

$dV_t = dP_t + dC_t \qquad dP_t = r P_t dt$

Donc $\cancel{dP_t} + dC_t = (V_t - m C_t) r\, dt + m C_t \frac{dS_t}{S_t}$

$$= (\cancel{P_t} + C_t - m C_t) r\, dt + m C_t (\mu dt + \sigma dW_t)$$

$$\frac{dC_t}{C_t} = [m\mu + r(1-m)]dt + m\sigma dW_t = [r + (\mu - r)m]dt + \sigma m\, dW_t$$

Black-Scholes

$$\begin{cases} \mu_c = r + (\mu_S - r)m \\ \sigma_c = m\,\sigma_S \end{cases}$$

Ratio de Sharpe : $\frac{\mu_c - r}{\sigma_c} = \frac{r + (\mu - r)m - r}{m\sigma} = \frac{\mu - r}{\sigma}$

$\Rightarrow$ m̂ ratio de Sharpe que S.

CPPI c'est une sorte de produit dérivé de delta

$$\Delta_t = \frac{X_t}{S_t} = \frac{m(V_t - P_t)}{S_t}$$

Rq Stratégie de type "trend" (tendance) : on investit plus lorsque l'actif risqué monte et moins lorsqu'il décroît "convexe".

Constant-Mix : investir toujours une partie λ de la valeur du portefeuille ds l'actif risqué.

Ex $\lambda = 40\%$ 50% etc.

C'est une stratégie dynamique ? OUI

Ex Scénario 1 $100 \to 110 \to 100$

$1000€$ $\lambda = 0.5$ 500 $t=0$ $\underset{\Longrightarrow}{t=1}$ 500

500 $500 \cdot \frac{110}{100} = 550$

$\xleftarrow{\text{ré-allocation}}$

$€ = 1t$ $525 \leftarrow$ ss risque.

$525 \leftarrow$ risque

$100 \to 80$ 500 $\xrightarrow{\text{ré-allocation}}$ 450

$500 \cdot \frac{80}{100} \to 400 \to 400$

C'est une stratégie "concave"

"contrarienne"

"profit max si oscillations.

Evolution du portefeuille "constant-mix".

Π_t = valeur du portef, λ = % investi ds actif risqué

$\frac{\lambda \Pi_t}{S_t}$ = # parts ss-jacent risqué. Par auto-financement

$$d\Pi_t = \frac{\lambda \Pi_t}{S_t} dS_t + (1-\lambda)\Pi_t \, r\,dt = \lambda \Pi_t (\mu\, dt + \sigma\, dW_t)$$

$$+ (1-\lambda)\Pi_t \, r\,dt$$

Donc $\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} = \big(r + \lambda(\mu - r)\big)dt + \lambda\sigma\, dW_t$.

Π_t se comporte comme un actif artificiel de tendance $r + \lambda(\mu - r)$ et volatilité $\lambda\sigma$, donc son ratio de

$$\text{Sharpe} = \frac{r+\lambda(\mu-r) \quad - r}{\lambda\sigma} = \frac{\mu-r}{\sigma} = \text{ratio de Sharpe}$$

de S_t. $\lambda<1$ donc Π_t est moins volatil que S_t mais a rendement moindre (si $\mu>r$).

Calculons β de Π_t $\quad \beta = \dfrac{\mathrm{cov}(R_{\Pi_t}, R_{S_t})}{\mathrm{Var}(R_{S_t})}$

$$\frac{\mathrm{cov}\left(\{r+\lambda(\mu-r)\}\Delta t + \lambda\sigma\Delta W_{t,t+\Delta t},\ \mu\Delta t + \sigma\Delta W_{t\to t+\Delta t}\right)}{\mathrm{Var}\left(\mu\Delta t + \sigma\Delta W_{t\to t+\Delta t}\right)}$$

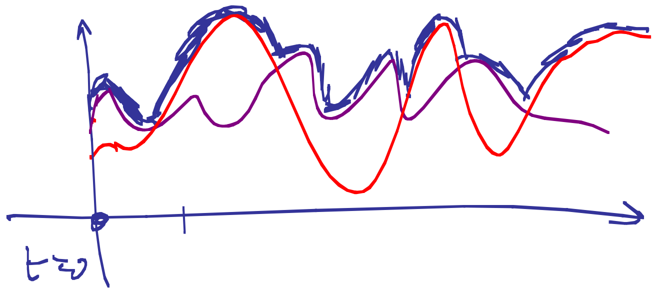
$$= \frac{\lambda\sigma^2\cdot\Delta t}{\sigma^2\Delta t} = \lambda < 1.$$

Rq Cst Mix n'est pas la m̂ chose que CPPI($m=\lambda$).

Exo Calculer le β du CPPI. $\quad \beta = \dfrac{C_t}{V_t}\cdot m$

Cst Mix = CPPI($m=\lambda$, $P_t\equiv 0$).

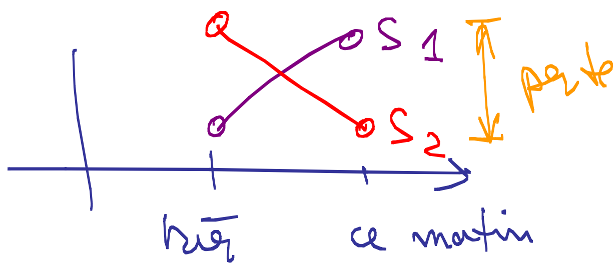
STOP-LOSS (Start-Gain) Idée : choisir le meilleur de 2 actifs



20€

investis^t $\quad \mathbb{1}_{S_1^t > S_2^t}\cdot S_t^1 +$

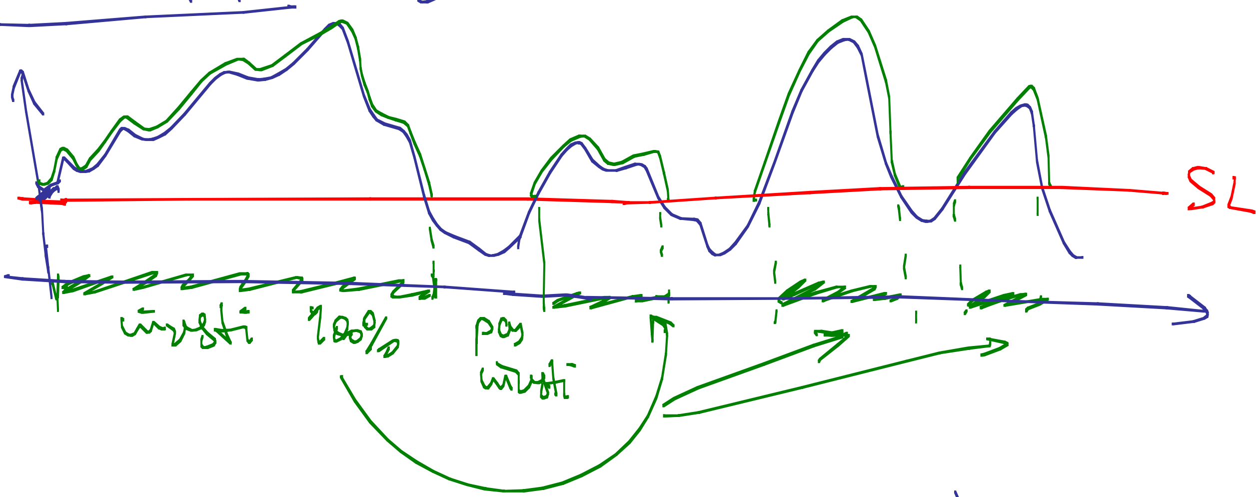
2×10€



Question pqk des pertes ?

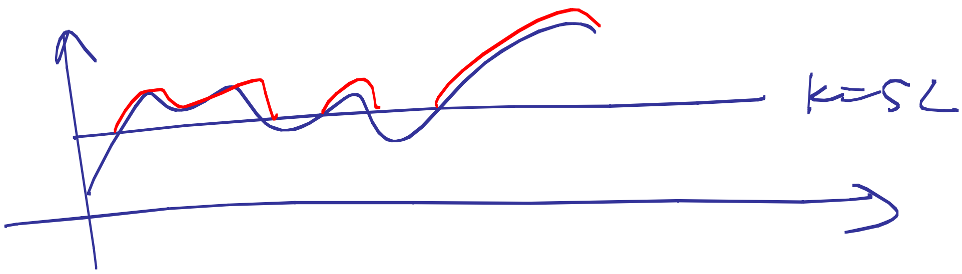
chaque croisement ≃ perte.

Cas simplifié $S_2 \equiv cst$. "stop loss"

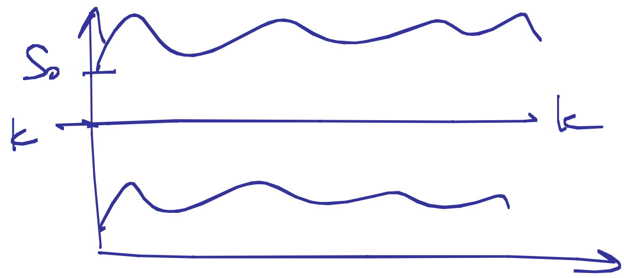


Payoff de cette stratégie : $(S_T - SL)_+$

≠ payoff qu'un call européen de strike $K = SL$.



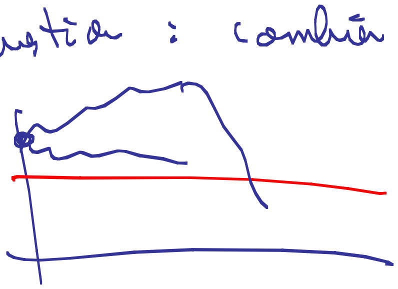
2 cas de pertes

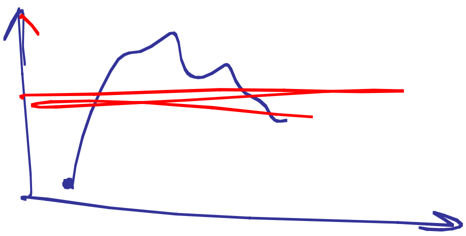


Valeur intrinsèque $=(S-K)_+$

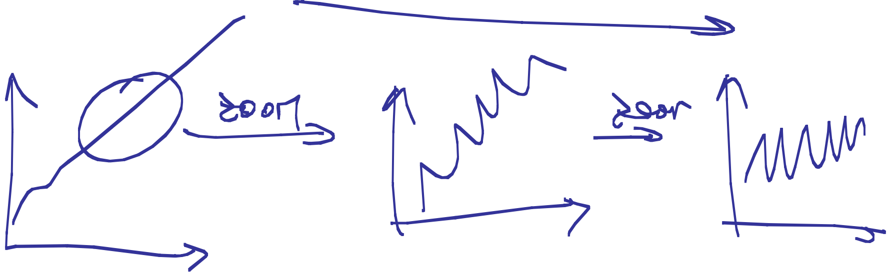
Perte = si croisement du niveau K..

Question : combien de pertes ?





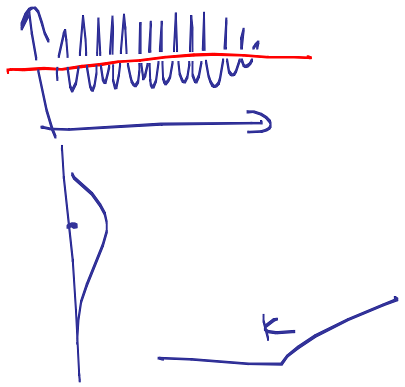
Zoom Brownien :

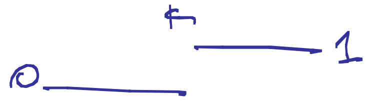


PCHi

Δ-hedging : hedging + souvent = mieux

STOP-loss : NON.





distribution

$$f(x) = (x-K)_+ \qquad f'(x) = \mathbb{1}_{x \geq K}(x) \, , \quad f''(x) = \delta_{x=K}$$

$$f(S_T) \overset{\text{Itô}}{=} f(S_0) + \int_0^T f'(S_t)\, dS_t + \int_0^T \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 f''(S_t)\, dt$$

$$\|$$

$$\underbrace{(S_T-K)_+}_{\text{payoff attendu}} = \underbrace{(S_0-K)_+}_{\text{investissement initial ds la strat STOP-LOSS}} + \underbrace{\int_0^T \mathbb{1}_{S_t \geq K}(S_t)\, dS_t}_{\text{gains de la strat STOP-LOSS}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2 S_t^2 \delta_{S_t=K}\, dt}_{\geq 0 \text{ pertes de la stratégie STOP-LOSS}}$$

investissement initial ds la strat STOP-LOSS → valeur intrinsèque

pertes de la stratégie STOP-LOSS → lié à la notion de tps local.

Sous proba risque neutre et en numéraire actif ss risque

$$\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = \sigma\, d\hat{W}_t . \qquad \frac{dS_t}{S_t} = r\,dt + \sigma\, d\hat{W}_t . \quad \tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$$

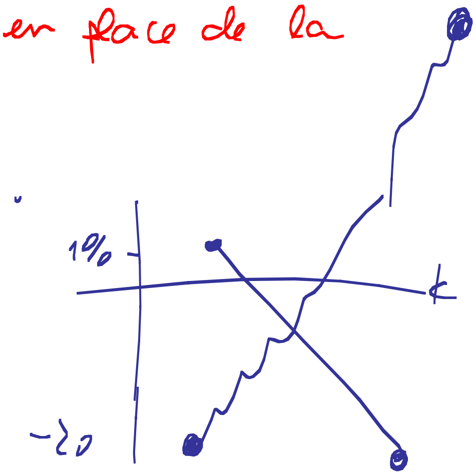
$\tilde{S}_t$ = martingale ! Par passage à la moyenne p/r à la mesure risque neutre $\mathbb{Q}$:

$$\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(S_T-K)_+ e^{-rT}\right]}_{\mathbb{E} \text{ actualisation du payoff = valeur de l'option}} = \underbrace{(S_0-K)_+}_{\text{valeur intrinsèque (initiale)}} + 0 + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2 \tilde{S}_t^2 \delta_{S_t=K}\, dt}_{\text{valeur temps de l'option.}}$$

car $\tilde{S}_t$ = martingale donc $\mathbb{E} \int_{[0,\infty]} d\tilde{S}_t = 0$

Valeur intrinsèque est nécessaire à la mise en place de la stratégie.

Ce n'est pas une strat. auto-financée.



Note stratégie robuste p/r aux incertitudes sur la volatilité!

Théorie : tout
documents : OK