Gestion de risques et construction de portefeuille

Gabriel Turinici
Master M2 ISF
Université Paris Dauphine – PSL

année académique 2020-21

Chapitre: Stratégies dynamiques de portefeuille: (Stop-Loss), CPPI, Constant Mix

Rappels: CPPI
(Constant Proportion Portfolio Insurance)

Idée: nous avons une somme sous gestion Vt avec contrainte de toujours avoir au moins Pt en portefeuille.

Elements constitutifs:

- Le portefeuille de valeur Vt
- Le plancher de valeur Pt : souvent se comporte comme l'article sans risque
- Le coussin Ct = Vt – Pt
- Le multiplicateur m >0 (souvent >1)
- La partie investie en actifs risqués Xt = m Ct
- La partie monétaire Mt = Vt - Xt

Rappels : CPPI

- Exemple numérique: V0= 100, m=5, P0=90, r=0, $(\Rightarrow P_t = 90 \ \forall t)$

- Scenario 1: S0=100, S1= 95, S2= 90 : OK
- Scenario 2: S0=100, S1= 110, S2= 120 : OK
- Scenario 3: S0=100, S1= 110, S2= 80 : pas OK

- Conclusion: pour respecter le plancher il faut ré-allouer souvent avec un marché supposé continu.

Rappels: CPPI

Portefeuille : P_t plancher ss risque

C_t coussin, risqué

- Évolution du coussin ?

$P_t = P_0 e^{rt}$ $\quad C_t = ?$

- Hypothèse sur l'actif risqué: Black-Scholes (log normal)

S_t : $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$ (Rdt log-normal)

$\frac{S_{t+\delta t} - S_t}{S_t}$ = normale (δt petit)

$dC_t = ?$

Question Rdt de C_t ?

$\frac{C_{t+\delta t} - C_t}{C_t} \sim$ (loi ?)

TP : loi normale.

Théoriquement : comprendre acc.

$V_t = P_t + C_t \qquad dP_t = rP_t\,dt$ (hypothèse)

↳ portef auto-financé $\quad V_t = M_t + X_t$

$$\left[dV_t = rM_t\,dt + \frac{X_t}{S_t}dS_t = r(V_t - mC_t)dt + \frac{mC_t}{S_t}dS_t \right.$$

$$\left[dV_t = dP_t + dC_t \right.$$. Donc $\cancel{dP_t} + dC_t = r(V_t - mC_t)dt +$

$$m\,C_t\frac{dS_t}{S_t} = r(\cancel{P_t} + C_t)\underline{dt} - rm\,\underline{C_t\,dt} + m\,C_t(\underline{\mu\,dt} + \sigma\,dW_t)$$

Donc $\displaystyle\frac{dC_t}{C_t} = \underbrace{[r + m(\mu - r)]}_{\tilde{\mu}}dt + \underbrace{m\sigma}_{\tilde{\sigma}}dW_t = \tilde{\mu}\,dt + \tilde{\sigma}\,dW_t$

Conclusion $\frac{dC_t}{C_t} = \tilde{\mu}\,dt + \tilde{\sigma}\,dW_t$ $\quad \tilde{\mu} = r + m(\mu - r)$, $\tilde{\sigma} = m\sigma$

C_t : actif Black-Scholes.

Ratio de Sharpe : $\frac{\tilde{\mu} - r}{\tilde{\sigma}} = \frac{r + m(\mu - r) - r}{m\sigma} = \frac{\mu - r}{\sigma}$

$=$ ratio de Sharpe de $(S_t)_{t \geq 0}$

CPPI une sorte de produit dérivé ayant un delta de $\delta_t = \frac{X_t}{S_t}$.

$= m(V_t - P_t) / S_t$

Rq stratégie de type "trend" (tendance) "convexe" : plus l'actif monte plus on investit dessus.

Stratégie : Constant Mix

Déf investir toujours une partie (proportion) λ de la valeur du portefeuille dans l'actif risqué (S_t).

Ex $\lambda \leq 1$ $\lambda \simeq 40\%, 50\%, 60\% \ldots$

Question est-ce une stratégie dynamique ? oui

Ex $\underset{S_0}{100} \to 110 \to 120$ $V_0 = 1000$ € $\lambda = 1/2$

$t=0$ 500 € ss risque
500 € risqué = 5 actifs

$t=1$ 500 € $(r=0) \to$ 500 € (ss risque)
5 actifs de valeur $5 \cdot 110 = 550$

$V_1 = 1050$ $\to$ 525 ss risque
$\to$ 525 risqué
$\frac{525}{110}$ actifs < 5.

C'est une stratégie concave/contrarienne. Elle va à l'encontre de la tendance. Gains map si oscillations.

Évolution du portf. Const Mix

V_t = valeur $\qquad \frac{\lambda V_t}{S_t}$ = # parts actif risqué

$$dV_t = \frac{\lambda V_t}{S_t} dS_t + (V_t - \lambda V_t)\, r\, dt = \lambda V_t (\mu dt + \sigma dW_t) + (1-\lambda) r V_t dt$$

Donc $$\frac{dV_t}{V_t} = \underbrace{\left(r + \lambda(\mu - r)\right)}_{\tilde{\mu}} dt + \underbrace{\lambda\sigma}_{\tilde{\sigma}} dW_t = \tilde{\mu}\, dt + \tilde{\sigma}\, dW_t$$

Sharpe : $\frac{\mu - r}{\sigma}$ = ratio de S_t.

Comme sxt $\lambda < 1$ c'est diff de CPPI. Cst Mix est un CPPI ss plancher Cst Mix $(\lambda) = CPPI(m = \lambda, P_t = 0)$.

Calcul de β de V_t : $\beta = \dfrac{\mathrm{cov}(R_{V_t}, R_{S_t})}{\mathrm{var}(R_{S_t})}$

$$= \frac{\mathrm{cov}\left(\{r + \lambda(\mu - r)\}\Delta t + \lambda\sigma\,\mathcal{N}_1(0,\Delta t),\ \mu\Delta t + \sigma\,\mathcal{N}_1(0,\Delta t)\right)}{\mathrm{Var}(\mu\Delta t + \sigma\,\mathcal{N}(0,\Delta t))}$$

$$= \frac{\lambda\sigma^2\Delta t}{\sigma^2\Delta t} = \lambda < 1.$$ ss-exposé au marché.

TP : implémentation.