Gestion classique de portefeuille : actions

Master 2 ISF classique

Université Paris Dauphine

Gabriel Turinici

année académique 2021/2022

DISCLAIMER

Attention: ce qui suit est une présentation "culturelle" de la théorie du portefeuille dite "classique". La théorie est présentée telle qu'elle se retrouve dans la littérature de spécialité, mais il n'y a en particulier aucune prétention sur les performances attendues EN MONDE REEL d'un portefeuille qui suivrait les préconisations théoriques.
En particulier les notions plus récemment introduites et discutées telles que l'allocation de Kelly, la théorie des grandes déviations et événements rares (distributions à traine épaisse) peuvent et souvent jouent un rôle important à ne pas négliger dans la réalité des investissements.
En particulier rien de ce que suit n'est une invitation à un investissement financier quelconque.

Introduction sur les actions

- Produits financiers de base: **Actions** (shares)
- Caractéristiques des actions:
  - émises par des entreprises
  -Une action est un titre de participation dans le capital social de son émetteur.
  -Donnent droit à des dividendes (i.e partage du bénéfice), donnent droit au vote; par opposition les obligations qui sont des créances n'ont pas de droit de vote ni participation aux bénéfices
  -Rang de séniorité inférieur aux obligation (e.g en cas de faillite les créanciers sont d'abord remboursés) donc rendement supérieur (pourquoi? sur quel horizon?)
  -Marché primaire: IPO ("Initial public offering") suivie de négociation sur des bourses. (marchés secondaires).
  -Le marché primaire est le lieu de rencontre des agents en besoin de financement et des agents disposant d'épargne, il s'agit du marché d'émission des titres.

Introduction sur les actions

- Question: Comment optimiser son portefeuille composé majoritairement d'actions ?
- Notion de base: le rendement ("return") / la rentabilité (pourquoi pas le prix?) :
  -Le prix à la date t est noté : P_t
  -Rendement / Rentabilité simple: $R_t = (P_t - P_{t-1})/P_{t-1}$
  -Rendement géométrique (log) : $R_t = log(P_t/P_{t-1})$
  -On peut tenir compte des dividendes payés en t dans ce cas nous avons:

$$R_t = \frac{(P_t + D_t) - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{1}$$

  En pratique on observe que les rentabilités sont des variables normales $R_t \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$
  Rq: $m >$ rendement de l'actif sans risque.

Introduction sur les actions

- Quelles actions choisir? Comment prévoir les prix pour en tirer profit (ou ne pas trop perdre) ?
- Notion d'efficience: le prix reflete toute l'information
  -passée (faible, analyse technique inutile)
  -toute l'information publique (semi-forte,analyse fondamentale inutile)
  -toute l'information publique ou privée (forte, aucun gain sûr possible)

  Hypothèse importante: pas de possibilité d'arbitrage ce qui signifie qu'avec un investissement initial nul on ne peut pas gagner à coup sûr une quantité strictement > 0.

Actions: notations

Notations:

- les d actifs risqués notés $S^1, \ldots, S^d$
- actif sans risque noté, S^0 de rendement R^0
- $R = \begin{pmatrix} R^1 \\ \ldots \\ R^i \\ \ldots \\ R^d \end{pmatrix} = (R^1 \ldots R^d)^T$ la matrice de rendements des actifs risqués;
- $m^i = \mathbb{E}(R^i), M = \mathbb{E}(R)$ la moyenne des rendements des actifs risqués;
- $\Sigma = (\sigma^{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant d} = cov(R^i, R^j)_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$
- la stratégie d'investissement est définie par un vecteur $\pi = (\pi^1 \ldots \pi^d)^T$ où π^i représente la proportion de la richesse initiale W investie dans l'actif risqué S^i

  On note donc $1 - \sum_{i=1}^{d} \pi^i$ la proportion de la richesse investie dans l'actif sans risque.

Rentabilité du portefeuille

Exercice:

π	25%	75%	Portefeuille
R	10%	5%	?

Rentabilité du portefeuille

Résolution:
Notons la richesse initiale W.
La richesse investie dans l'actif 1 noté S^1 est égale á $\pi^1 = 0.25 * W$
La richesse investie dans l'actif 2 noté S^2 est égale á $\pi^2 = 0.75 * W$
La valeur du portefeuille en T est donc
$0.25 * W(1 + 10\%) + 0.75 * W(1 + 5\%)$
La rentabilité du portefeuille est :

$$R = \frac{0.25 * W * (1 + 10\%) + 0.75 * W * (1 + 5\%) - W}{W} = 6.25\%. \quad (2)$$

Rentabilité du portefeuille

Formule générale pour la rentabilité

La richesse finale est donnée par :

$W*(1-\sum\pi^i)*(1+R^0)+\sum_i W\pi^i*(1+R^i) = W*[1+R^0+\pi^T\cdot(R-R^0\mathbb{1})]$

Rentabilité du portefeuille: $R^0+\pi^T(R-R^0\mathbb{1})$

Espérance: $R^0+\pi^T(M-R^0\mathbb{1})$ "Average return"

Variance de la rentabilité: $\pi^T\Sigma\pi$ " Variance of the return"

Rentabilité du portefeuille

Exercice

Soit le portefeuille Π composé des actifs risqués A et B tel que $corr(A,B) = -1$:

Actif	Rendement espéré	Variance
A	4%	3%
B	10%	12%

Vérifiez qu'il est possible à partir de ces deux titres de former un portefeuille sans risque.

Rentabilité du portefeuille

Résolution:

Le vecteur des rendements est $M = \begin{pmatrix} 4\% \\ 10\% \end{pmatrix}$.

On a $\Sigma_{1,2} = \Sigma_{2,1}$.
$Cov(A, B) = corr(A, B) * \sqrt{Var(A)} * \sqrt{Var(B)} = -1 * \sqrt{3\% * 12\%} = -0.06$.

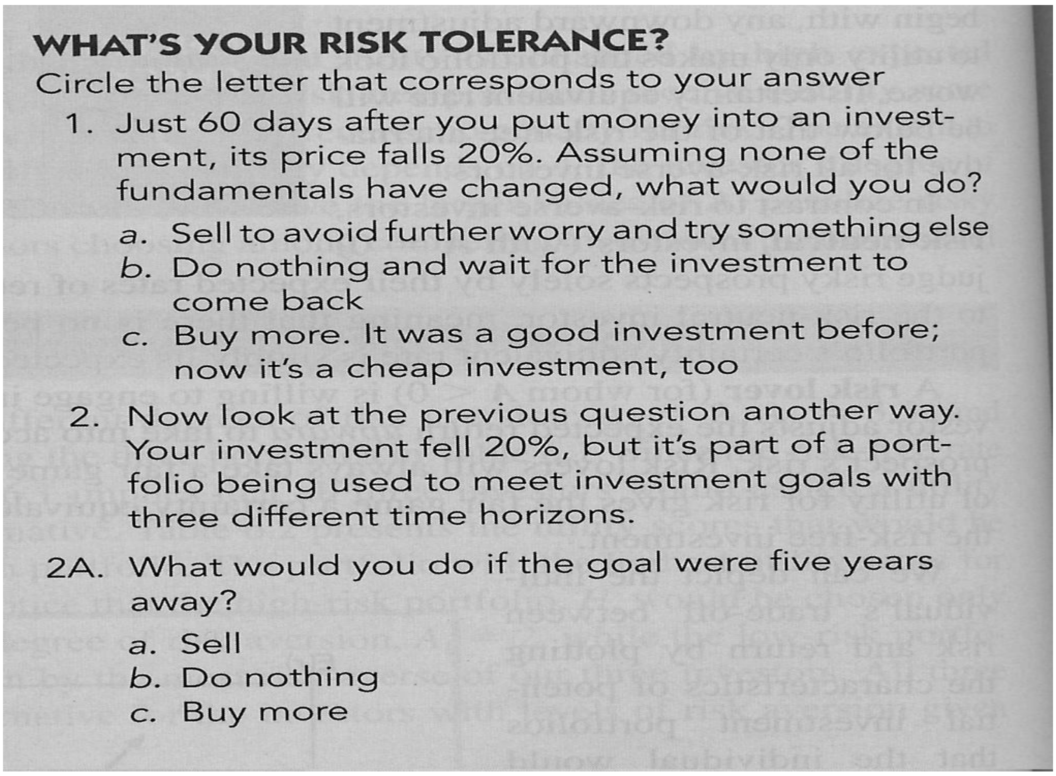
La matrice de variance covariance: $\Sigma = \begin{pmatrix} 3\% & -6\% \\ -6\% & 12\% \end{pmatrix}$.

La variance du portefeuille est donc: $V_\Pi = \pi^T \Sigma \pi$ ou $\pi = \begin{pmatrix} \pi^1 \\ \pi^2 \end{pmatrix}$

$V_\Pi = (\pi^1 \pi^2) \begin{pmatrix} 3\%\pi^1 - 6\%\pi^2 \\ -6\%\pi^1 + 12\%\pi^2 \end{pmatrix}$

$V_\Pi = 3\% * (\pi^1 - 2\pi^2)^2$.

Le portefeuille est sans risque ssi $V_\Pi = 0$ c'est à dire $\pi^1 - 2\pi^2 = 0$ i.e., $\pi^1 = 2\pi^2$. Comme $\pi^1 + \pi^2 = 1$ alors $\pi^1 = 2/3$ et $\pi^2 = 1/3$.



WHAT'S YOUR RISK TOLERANCE?

Circle the letter that corresponds to your answer

1. Just 60 days after you put money into an investment, its price falls 20%. Assuming none of the fundamentals have changed, what would you do?
   a. Sell to avoid further worry and try something else
   b. Do nothing and wait for the investment to come back
   c. Buy more. It was a good investment before; now it's a cheap investment, too
2. Now look at the previous question another way. Your investment fell 20%, but it's part of a portfolio being used to meet investment goals with three different time horizons.

2A. What would you do if the goal were five years away?
   a. Sell
   b. Do nothing
   c. Buy more

Figure: risk perception

2B. What would you do if the goal were 15 years away?
a. Sell
b. Do nothing
c. Buy more

2C. What would you do if the goal were 30 years away?
a. Sell
b. Do nothing
c. Buy more

3. The price of your retirement investment jumps 25% a month after you buy it. Again, the fundamentals haven't changed. After you finish gloating, what do you do?
a. Sell it and lock in your gains
b. Stay put and hope for more gain
c. Buy more; it could go higher

4. You're investing for retirement, which is 15 years away. Which would you rather do?
a. Invest in a money-market fund or guaranteed investment contract, giving up the possibility of major gains, but virtually assuring the safety of your principal
b. Invest in a 50-50 mix of bond funds and stock funds, in hopes of getting some growth, but also giving yourself some protection in the form of steady income
c. Invest in aggressive growth mutual funds whose value will probably fluctuate significantly during the year, but have the potential for impressive gains over five or 10 years

5. You just won a big prize! But which one? It's up to you.
a. $2,000 in cash
b. A 50% chance to win $5,000
c. A 20% chance to win $15,000

6. A good investment opportunity just came along. But you have to borrow money to get in. Would you take out a loan?
a. Definitely not
b. Perhaps
c. Yes

7. Your company is selling stock to its employees. In three years, management plans to take the company public. Until then, you won't be able to sell your shares and you will get no dividends. But your investment could multiply as much as 10 times when the company goes public. How much money would you invest?
a. None
b. Two months' salary
c. Four months' salary

Figure: risk perception

Perception du risque : Markowitz

2B. What would you do if the goal were 15 years away?
a. Sell
b. Do nothing
c. Buy more

2C. What would you do if the goal were 30 years away?
a. Sell
b. Do nothing
c. Buy more

3. The price of your retirement investment jumps 25% a month after you buy it. Again, the fundamentals haven't changed. After you finish gloating, what do you do?
a. Sell it and lock in your gains
b. Stay put and hope for more gain
c. Buy more; it could go higher

4. You're investing for retirement, which is 15 years away. Which would you rather do?
a. Invest in a money-market fund or guaranteed investment contract, giving up the possibility of major gains, but virtually assuring the safety of your principal
b. Invest in a 50-50 mix of bond funds and stock funds, in hopes of getting some growth, but also giving yourself some protection in the form of steady income
c. Invest in aggressive growth mutual funds whose value will probably fluctuate significantly during the year, but have the potential for impressive gains over five or 10 years

5. You just won a big prize! But which one? It's up to you.
a. $2,000 in cash
b. A 50% chance to win $5,000
c. A 20% chance to win $15,000

6. A good investment opportunity just came along. But you have to borrow money to get in. Would you take out a loan?
a. Definitely not
b. Perhaps
c. Yes

7. Your company is selling stock to its employees. In three years, management plans to take the company public. Until then, you won't be able to sell your shares and you will get no dividends. But your investment could multiply as much as 10 times when the company goes public. How much money would you invest?
a. None
b. Two months' salary
c. Four months' salary

SCORING YOUR RISK TOLERANCE

To score the quiz, add up the number of answers yo gave in each category a–c, then multiply as shown t find your score

(a) answers _____ × 1 = _____ points
(b) answers _____ × 2 = _____ points
(c) answers _____ × 3 = _____ points

YOUR SCORE _____ points

If you scored . . .	**You may be a:**
9–14 points	Conservative investor
5–21 points	Moderate investor
22–27 points	Aggressive investor

Figure: risk perception

Perception du risque: Markowitz

- Chaque agent a sa propre perception du risque
- Notion d'équivalent certain (cf. test)
- Simplification : les préférences sont seulement fonction de la moyenne et de la variance du rendement. Soit U la fonction d'utilité qui représente les préférences, on a : $U = U(E, Var)$.
C'est le critère de moyenne-variance de Markowitz.
- Portefeuille efficient : il s'agit du portefeuille pour lequel aucun autre n'est meilleur au sens des critères que sont la moyenne et la variance. Par exemple, la fonction d'utilitè U (qui vient de $\mathbb{E}(-e^{-\lambda X})$ pour X v.a. normale) telle que :

$$U(x, y) = x - \lambda y, \quad où : x = E(R), y = V(R). \tag{3}$$

- certains problèmes connus (variance grande pour moyenne positive donne utilité négative).

Détermination du portefeuille optimal : sans actif sans risque

- Portefeuilles admissibles : $\mathcal{A}_{noS_0} = \{\Pi \in \mathcal{R}^d, \mathbb{1}^T \Pi = 1\}$
- Problème d'optimisation :

$$\sup \Pi^T.M$$

$$s.c : \begin{cases} \Pi^T \Sigma \Pi = \sigma^2 \\ \Pi^T \mathbb{1} = 1 \end{cases}$$

Question technique: Soit : $f(\Pi) = \Pi^T \Sigma \Pi$, calculer $\nabla_\Pi f$.

Détermination du portefeuille optimal : sans actif sans risque

Rappel (dérivabilité Fréchet):
$f(X+\delta X)=f(X)+\langle \nabla_X f,\delta X\rangle+o(\|\delta X\|)$
$\langle a,b\rangle=a^T.b=\langle b,a\rangle$
On a :

$$
\begin{aligned}
f(\Pi+\delta\Pi)-f(\Pi) &= (\Pi+\delta\Pi)^T\Sigma(\Pi+\delta\Pi)-\Pi^T\Sigma\Pi \\
&= \Pi^T\Sigma\delta\Pi+(\delta\Pi)^T\Sigma\Pi+\underbrace{(\delta\Pi)^T\Sigma(\delta\Pi)}_{=o(\|\delta\Pi\|)} \\
&= \langle\Pi,\Sigma\delta\Pi\rangle+\langle\Sigma\Pi,\delta\Pi\rangle+o(\|\delta\Pi\|) \\
&= 2\langle\Sigma\Pi,\delta\Pi\rangle+o(\|\delta\Pi\|)
\end{aligned}
$$

Par identification : $\langle\nabla_\Pi f,\delta\Pi\rangle=2\langle\Sigma\Pi,\delta\Pi\rangle$ d'oú : $\nabla_\Pi f=2\Sigma\Pi$.

Détermination du portefeuille optimal : sans actif sans risque

Résolution du problème d'optimisation : multiplicateur de Euler-Lagrange :

$$\mathcal{L}=\Pi^TM+\lambda(\sigma^2-\Pi^T\Sigma\Pi)+\eta(1-\Pi^T\mathbb{1}) \tag{4}$$

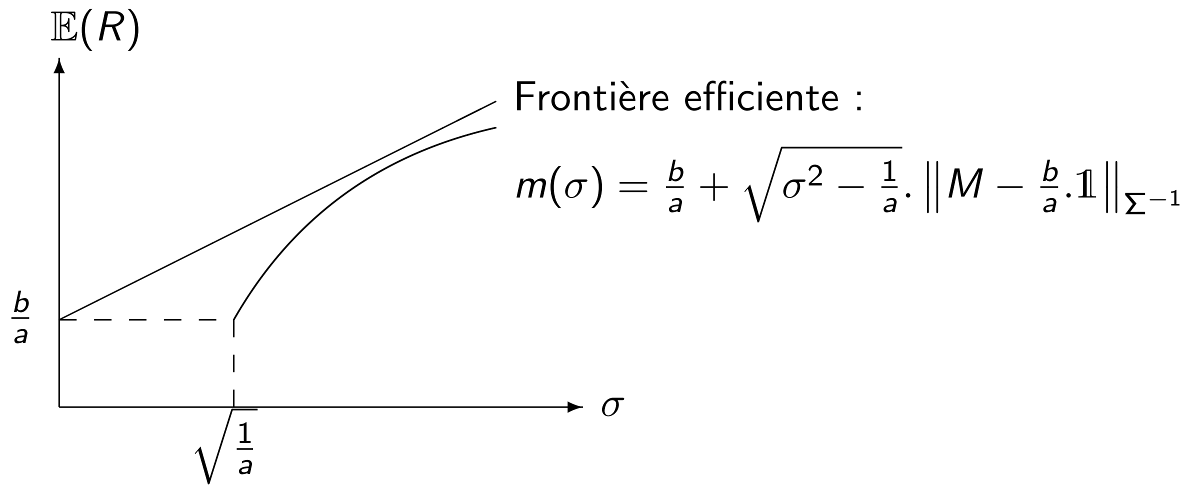
$$\to\begin{cases}(1)\ \nabla_\Pi\mathcal{L}=M-2\lambda\Sigma\Pi-\eta\mathbb{1}=0\\(2)\ \nabla_\lambda\mathcal{L}=\sigma^2-\Pi^T\Sigma\Pi=0\\(3)\ \nabla_\eta\mathcal{L}=1-\Pi^T\mathbb{1}=0\end{cases}$$

Notations:

- $a=\mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}\equiv\|\mathbb{1}\|_{\Sigma^{-1}}$
- $b=\langle 1,M\rangle_{\Sigma^{-1}}$, $o\grave{u}$: $\langle x,y\rangle_{\Sigma^{-1}}=x^T\Sigma^{-1}y$
- (2)$\Leftrightarrow\sigma^2=\Pi^T\Sigma\Pi$
- (1)$\Leftrightarrow\Pi=\frac{1}{2\lambda}\Sigma^{-1}(M-\eta\mathbb{1})$
- (3)$\Leftrightarrow\eta=\frac{b}{a}-\frac{2\lambda}{a}$

$\to$ **Solution** (pour $\sigma^2\geq\frac{1}{a}$) : $\Pi(\sigma)=\frac{\Sigma^{-1}\mathbb{1}}{a}+\sqrt{\sigma^2-\frac{1}{a}}.\Sigma^{-1}.\frac{M-\frac{b}{a}\mathbb{1}}{\left\|M-\frac{b}{a}\mathbb{1}\right\|_{\Sigma^{-1}}}$

Détermination du portefeuille optimal : sans actif sans risque



Détermination du portefeuille optimal : avec actif sans risque

- Portefeuilles admissibles : $\mathbb{R}^d$
- Problème d'optimisation :

$$\sup R^0 + \Pi^T(M - R^0.\mathbb{1})$$

$$s.c : \Pi^T\Sigma\Pi = \sigma^2$$

Résolution du problème d'optimisation : multiplicateur de Euler-Lagrange :

$$\mathcal{L} = R^0 + \Pi^T(M - R^0.\mathbb{1}) + \lambda(\sigma^2 - \Pi^T\Sigma\Pi) \qquad (5)$$

$$\begin{cases} (1)\ \nabla_\Pi \mathcal{L} = M - R^0.\mathbb{1} - 2\lambda\Sigma\Pi = 0 \\ (2)\ \nabla_\lambda \mathcal{L} = \sigma^2 - \Pi^T\Sigma\Pi = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \sigma^2 = \Pi^T\Sigma\Pi$

$\Pi = \frac{1}{2\lambda}\Sigma^{-1}(M - R^0.\mathbb{1})$

Détermination du portefeuille optimal : avec actif sans risque

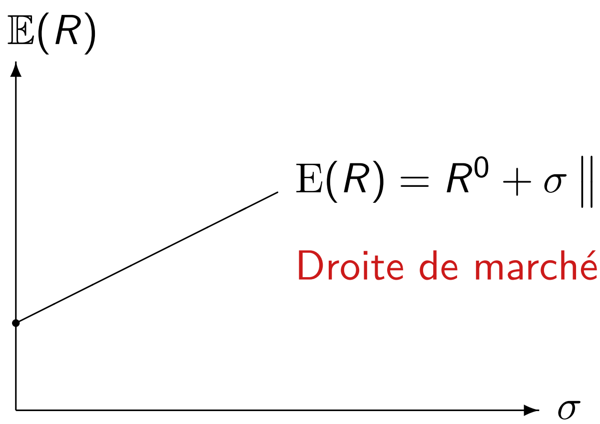
Solution : $\Pi(\sigma) = \sigma \frac{\Sigma^{-1}(M - R^0 \mathbb{1})}{\|M - R^0 \mathbb{1}\|_{\Sigma^{-1}}} = \frac{\sigma \Sigma^{-1}(M - R^0 \mathbb{1})}{\sqrt{sh}}$

Notations:

- $sh = \left\| M - R^0 . \mathbb{1} \right\|_{\Sigma^{-1}}^2$ (Performance de Sharpe)
- $\sqrt{sh}$: "Sharpe Ratio"

Détermination du portefeuille optimal : avec actif sans risque

Solution = droite : $m(\sigma) = R^0 + \sqrt{sh} \times \sigma$



$\mathrm{E}(R) = R^0 + \sigma \left\| M - R^0 . \mathbb{1} \right\|_{\Sigma^{-1}}$

Droite de marché / Security market line"

Donc il y a une relation linéaire entre la rentabilité espérée et le risque d'un portefeuille efficace.

Détermination du portefeuille optimal : avec actif sans risque

Cherchons σ_M tel que le portefeuille $\Pi(\sigma_M)$ ne contienne pas d'actif sans risque, i.e, $\mathbb{1}^T\Pi(\sigma_M) = 1$, ou encore $\frac{\mathbb{1}^T \sigma_M \Sigma^{-1}(M - R^0\mathbb{1})}{\sqrt{sh}} = 1$, ce qui implique $\sigma_M = \frac{\sqrt{sh}}{\mathbb{1}^T\Sigma^{-1}(M-R^0\mathbb{1})}$.
On remplace alors dans l'expression du portefeuille. On obtient le portefeuille de marché noté Π_M : $\Pi(\sigma_M) = \frac{\sqrt{sh}\Sigma^{-1}(M-R^0\mathbb{1})}{\mathbb{1}^T\Sigma^{-1}(M-R^0\mathbb{1})\sqrt{sh}}$ donc

$$\Pi(\sigma_M) = \frac{\Sigma^{-1}(M - R^0\mathbb{1})}{\mathbb{1}^T\Sigma^{-1}(M - R^0\mathbb{1})} \overset{notation}{=} \Pi_M. \tag{6}$$

Théorème des deux fonds

- Composition du portefeuille optimal : répartition entre actif sans risque et indice de marché ou portefeuille de marché.
- Effectivement, on remarque que la partie des actifs risqués est toujours la même :

$$\Pi_M = \frac{\Sigma^{-1} \overbrace{(M - R^0\mathbb{1})}^{\text{rendements excédentaires}}}{\underbrace{\mathbb{1}^T\Sigma^{-1}(M - R^0\mathbb{1})}_{\text{facteur de normalisation}}}$$

Comme $m(\sigma) = R^0 + \sqrt{sh}\,\sigma$ alors $m(\sigma_M) = R^0 + \sqrt{sh}\,\sigma_M$ ce qui implique $\sqrt{sh} = \frac{(m(\sigma_M)-R^0)}{\sigma_M}$ donc $m(\sigma) = R^0 + \left(\frac{m(\sigma_M)-R^0}{\sigma_M}\right)\sigma$ où $\frac{m(\sigma_M)-R^0}{\sigma_M}$ est le prix du marché du risque / risk premium

Remarque / cas particulier :

Pour $\Sigma = \bar{\sigma}^2 I$ (actifs indépendants et de même volatilité) alors $(\Pi_M)_i = \frac{m_i - R^0}{\sum_k (m_k - R^0)}$

Théorème des deux fonds

Exemple :
Monsieur X décide de placer son épargne de 1000 euros sur le marché financier. Il s'adresse à un conseiller financier qui lui recommande de constituer le portefeuille suivant (dans les parenthéses : rendement/risque) :

- 300 euros dans un fond monétaire (actif sans risque);
- 350 euros dans un fond d'actions européennes (15.5% / 23.45%);
- 350 euros dans un fond d'obligations (9.48% / 17.96%).

Sachant que la corrélation entre les deux fonds risqués est de -0.6, Déterminer le taux sans risque.

Théorème des deux fonds

Correction de l'exemple :
On a :

$$\Pi_M = \frac{\Sigma^{-1}(M - R^0\mathbb{1})}{\mathbb{1}^T\Sigma^{-1}(M - R^0\mathbb{1})} \tag{7}$$

$$\Pi(\sigma) = \frac{\sigma\Sigma^{-1}(M - R^0\mathbb{1})}{\|M - R^0\mathbb{1}\|_{\Sigma_{-1}}} \tag{8}$$

On sait que la corrélation entre les deux fonds risqués est de -0.6. Si on note S_1 le fond d'actions européennes et S_2 le fond d'obligations, on a $Cov(S_1, S_2) = Corr(S_1, S_2)\sqrt{Var(S_1)Var(S_2)}$ On obtient alors la matrice de variance/covariance suivante :

$\Sigma = \begin{pmatrix} (23.45\%)^2 & -0.6 * 17.96\% * 23.45\% \\ -0.6 * 17.96\% * 23.45\% & (17.96\%)^2 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 15.5\% \\ 9.48\% \end{pmatrix}$

Théorème des deux fonds

On cherche Π_M tel que $\Pi_M = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec

$$a + b = 1$$
$$\frac{a}{b} = \frac{350}{350} = 1$$

Dans le portefeuille de marché, on obtient les mêmes proportions pour les deux fonds :

$$\Pi_M = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Théorème des deux fonds

On obtient :

$$\mathbb{1}^T \Sigma^{-1}(M - R^0 \mathbb{1})\, \Pi_M = \Sigma^{-1}(M - R^0 \mathbb{1})$$

$$\mathbb{1}^T \Sigma^{-1}(M - R^0 \mathbb{1}) \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} 15.5\% - R^0 \\ 9.48\% - R^0 \end{pmatrix}$$

On pose $\lambda = \mathbb{1}^T \Sigma^{-1}(M - R^0 \mathbb{1}) \in \mathbb{R}$. On multiplie par Σ les 2 termes et on obtient :

$$\lambda \Sigma \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.5\% - R^0 \\ 9.48\% - R^0 \end{pmatrix}$$

Aussi, on a $\Pi(\sigma) = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.35 \end{pmatrix}$ donc $1 - \Pi(\sigma)^T \mathbb{1} = 0,3$ (300 euros investis dans l'actif sans risque).

Valeur de la partie risquée $= 1000 - 0,3 * 1000 = 700$ euros.

MEDAF /CAPM

- Chaque investisseur alloue ses actifs comme vu précédemment entre l'actif sans risque et le portefeuille de marché (c.f thm des 2 fonds).
- Si le marché est en équilibre, offre de titres = demande de titres donc l'offre de titres est répartie selon une somme de portefeuilles de marché.
- Conclusion: le portefeuille de marché Π_M est composé par les actifs risqués dans les proportions correspondant au nombre de titres disponibles sur le marché.

Remarque: on peut connaitre le portefeuille de marché en regardant la distribution de titres disponibles.
D'où l'idée des indices représentatifs du marché: un indice contenant les actifs dans des proportions correspondant à la capitalisation alors ceci doit être un portefeuille de marché, e.g CAC40; mais pas vrai pour les indices qui ne tiennent pas compte de la capitalisation, e.g le DJ (moyenne arithmétique.

MEDAF / CAPM / beta

Calculons $cov(R, R^{\Pi_M})$:
$cov(R, R^{\Pi_M}) = cov(R, \Pi_M^T R) = \Sigma \Pi_M$
$= \frac{\Sigma \Sigma^{-1}(M - R^0 \mathbb{1})}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1}(M - R^0 \mathbb{1})}$
Donc $cov(R, R^{\Pi_M}) = \frac{(M - R^0 \mathbb{1})}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1}(M - R^0 \mathbb{1})}$
Nous avons que $\sigma_M = \frac{\sqrt{Sh}}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1}(M - R^0 \mathbb{1})}$ et $\mathbb{E}(R^{\Pi_M}) = R^0 + \sqrt{Sh}\sigma_M$
$cov(R, R^{\Pi_M}) = \frac{(M - R^0 \mathbb{1})}{\sqrt{Sh}} \sigma_M$,
$cov(R, R^{\Pi_M}) = \frac{(M - R^0 \mathbb{1})}{\mathbb{E}(R^{\Pi_M}) - R^0} \sigma_M^2$
Donc $M - R^0 \mathbb{1} = \frac{cov(R, R^{\Pi_M})}{Var(R^{\Pi_M})} [\mathbb{E}(R^{\Pi_M}) - R^0]$

MEDAF / CAPM / beta

On introduit le beta $\beta_i = cov(R^i, R^{\Pi_M})/Var(R^{\Pi_M})$ et

$$\mathbb{E}(R^i) - R^0 = \beta_i(\mathbb{E}(R^{\Pi_M}) - R^0). \tag{9}$$

Soit ϵ_i défini par $R^i = R^0 + \beta_i((R^{\Pi_M}) - R^0) + \epsilon_i$. Alors $\mathbb{E}(\epsilon_i) = 0$, $cov(\epsilon_i, R^{\Pi_M}) = 0$. En effet on a :

$$\begin{aligned} cov(\epsilon_i, R^{\Pi_M}) &= cov(R^i - R^0 - \beta_i(R^{\Pi_M} - R^0), R^{\Pi_M}) \\ &= cov(R^i, R^{\Pi_M}) - \beta_i cov(R^{\Pi_M}, R^{\Pi_M}) \\ &= cov(R^i, R^{\Pi_M}) - \frac{cov(R^i, R^{\Pi_M})}{Var(R^{\Pi_M})} Var(R^{\Pi_M}) \\ cov(\epsilon_i, R^{\Pi_M}) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $Var(R^i) = \underbrace{\beta_i^2(\sigma_M)^2}_{\text{Risque systématique}} + \underbrace{Var(\epsilon_i)}_{\text{Risque spécifique(diversifiable)}}$.

MEDAF / CAPM / beta

<u>**Exercice**</u>: Calculer le Beta du Π_M:

$$\beta_{\Pi_M} = \frac{cov(R^{\Pi_M}, R^{\Pi_M})}{Var(R^{\Pi_M})}$$

$$\beta_{\Pi_M} = 1$$

<u>**Calcul de ϵ_i pour Π_M**</u>

$R^{\Pi_M} = R^0 + 1.(R^{\Pi_M} - R^0) + \epsilon_i \Longrightarrow \underline{\underline{\epsilon_i = 0}}$

Calcul pour portefeuille efficient

On considère α parts de Π_M et $(1-\alpha)$ parts d'actifs sans risques
On a par la formule des rendements:
$(1-\alpha)R^0 + \alpha R^{\Pi_M} = R^0 + \alpha(R^{\Pi_M} - R^0)$
Ceci satisfait donc l'équation avec $\beta = \alpha$ et $\epsilon_M = 0$.
Les portefeuilles efficients réalisent leur optimalité en éliminant le risque spécifique ϵ qui ne génère pas de rendement.

- Question: sachant que le portefeuille de marché a des poids positifs, pourquoi parfois l'allocation optimale n'est pas positive?
- Réponses possibles: le modèle, l'estimation de la VAR ou du rendement, les formules CAPM pas justes etc...
- Question de la robustesse aux estimations
- Si des contraintes (e.g vente à découvert) apparaissent, alors les solutions changent; la frontière efficiente n'est plus la même, etc...
- Faire les calculs: (non abordé en cours)
  $max[R^0 + \Pi^T(M - R^0\mathbb{1})]$
  s.c $\Pi^T \Sigma \Pi = \sigma^2$
  $(\Pi = \mu * \mu \Longleftrightarrow \Pi \geq 0)$

Arbitrage Pricing Theory

On tient compte ici de K "marchés" ou K "facteurs" qui ne sont pas de la même nature (donc pas échangeables entre eux directement etc).

$$R_i = a_i + b_{i,1}F_1 + ... + b_{i,k}F_k + \epsilon_i \; avec \; i = 1, \dots, n.$$

où $b_{i,k}$ est le béta de l'actif i sur le facteur k et

$$\mathbb{E}(\epsilon_i) = 0$$
$$\mathbb{E}(F_k) = 0$$
$$Cov(\epsilon_i, F_k) = 0$$
$$Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$$

Remarques :

- Les relations sont non triviales pour : $n \geq k+1$, sans actif sans risque et $n \geq k+2$, avec actif sans risque.
- Pour tout i, on a $\mathbb{E}(R^i) = a_i$.

Arbitrage Pricing Theory

Ecriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} \cdots \\ R_i \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ a_i \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{i,k} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots \\ F_k \\ \cdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdots \\ \epsilon_i \\ \cdots \end{pmatrix}.$$

$$R = a + bF + \epsilon$$

Facteurs : macroéconomiques, facteurs de type analyse fondamentale (taille, domaine...), statistiques (ACP...).

Relation fondamentale de l'APT :

Sous l'hypothése d'absence d'opportunité d'arbitrage, il existe des constantes λ_k telles que

$$\mathbb{E}(R_i) = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i,1} + ... + \lambda_K b_{i,K} \text{ avec } i = 1, \ldots, n \tag{10}$$

où λ_0 indépendant de i. Par ailleurs, si un actif sans risque existe $\lambda_0 = R^0$.

Arbitrage Pricing Theory

<u>Démonstration</u> : pour $\epsilon_i = 0$ avec actif sans risque.
On applique l'hypothése de non arbitrage au portefeuille Π.
Soit $\Pi \neq 0$ tel que $\sum_i b_{i,k}\Pi_i = 0 \ \forall k = 1, \ldots, K$ un tel π existe car $rang(b_{i,k}) \leq K < n$. Pour un tel π, on a :

$$\begin{aligned} R^\pi &= R^0 + \Pi^T(R - R^0\mathbb{1}) \\ &= R^0 + \sum_i \Pi_i(a_i + b_{i,k}F_k - R^0) \\ &= R^0 + \Pi^T(a - R^0\mathbb{1}). \end{aligned}$$

Comme ceci est une v.a constante, par AOA on a $R^\Pi = R^0$. Ainsi $\forall \pi \neq 0$ avec $b^T\Pi = 0$, on aura $(\mathbb{E}(R) - R^0\mathbb{1})^T\Pi = 0$ car $a = \mathbb{E}(R)$.

Arbitrage Pricing Theory

En utilisant le lemme qui suit, $\mathbb{E}(R) - R^0\mathbb{1}$ est linéairement dépendant des colonnes de b donc il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_K \in \Re$ tels que :

$$\mathbb{E}(R) - R^0\mathbb{1} = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k b_{\cdot,k}$$

i.e

$$\boxed{\mathbb{E}(R^i) = R^0 + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k b_{i,k} \quad \forall i = 1, \ldots, n}$$

Rappel : lemme : si "$Ax = 0$ implique $u^T x = 0$" alors u^T est dans l'espace linéaire des lignes de A= $\mathscr{A}$.

Arbitrage Pricing Theory

Démonstration : pour $\epsilon_i = 0$ sans actif sans risque.
Soit un investisseur initial nul

$$\sum_i \Pi_i = 0 \Leftrightarrow \mathbb{1}^T \Pi = 0.$$

On annule les "béta" sur chaque facteur $b^T \Pi = 0$. Alors le rendement est déterministe

$$R^\Pi = \sum_i \Pi_i (a_i + b_{i,k} F_k)$$

. Par AOA, le rendement est donc nul et $R^\Pi = \Pi^T(a + bF) = \Pi^T a = 0$.
En absence d'actif sans risque, on a $R^\Pi = \Pi^T R$ donc $\mathbb{E}(R^\Pi) = \Pi^T \mathbb{E}(R)$.
Conclusion : En utilisant à nouveau le lemme, $a = \mathbb{E}(R)$ est linéairement dépendante des colonnes de b et $\mathbb{1}$. On a $\mathbb{E}(R) \subset Vect\{colonnes\ de\ b, \mathbb{1}\}$ alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_K$ tels que

$$\mathbb{E}(R) = \lambda_0 \mathbb{1} + \lambda_1 b_{\cdot,1} + \cdots + \lambda_K b_{\cdot,K}.$$