Stratégies dynamiques de portefeuille: (Stop-Loss), CPPI, Constant Mix

Master 2

Université Paris Dauphine

(c) 2019+

Gabriel Turinici

Référence générale :
livre "Éléments de Calcul Stochastique pour l'Évaluation et la Couverture des Actifs Dérivés – avec Exercices Corrigés, Travaux Pratiques et Études de Cas" de Imen Ben Tahar, José Trashorras, Gabriel Turinici
ISBN-13: 978-2340009998

- version papier `https://www.amazon.fr/gp/product/2340009995`
- version online `https://turinici.com`

Stop-Loss

Idée: être actif seulement si supérieur à un niveau donné K, limiter les risques. Une sorte de delta hedging avec $\Delta_t = 1_{S_t \geq K}$.
Portefeuille Stop-Loss auto-financé Π_t est d'équation

$$d\Pi_t = 1_{S_t \geq K} dS_t + r(\Pi_t - 1_{S_t \geq K} S_t)dt \tag{1}$$

donc pour l'actualisation $\tilde{\Pi}_t = e^{-rt}\Pi_t$: $d\tilde{\Pi}_t = ... = 1_{S_t \geq K} d\tilde{S}_t$; si $\Pi_0 = (S_0 - K)_+$:

$$\tilde{\Pi}_T = (S_0 - K)_+ + \int_0^T 1_{S_t \geq K} d\tilde{S}_t. \tag{2}$$

Idéalement on voudrait un gain égal à $(S_T - K)_+$. Montrons qu'en réalité cet gain est inférieur i.e. $\Pi_T \leq (S_T - K)_+$.

Stop-Loss

Pour $e^{-rt}(S_t - K)_+ = (\tilde{S}_t - Ke^{-rt})_+$ on écrit Ito :

$$\begin{aligned} e^{-rT}(S_T - K)_+ &= (S_0 - K)_+ + \int_0^T 1_{S_t \geq K} d\tilde{S}_t \\ &+ \int_0^T \left[r1_{S_t \geq K} Ke^{-rt} + \frac{1}{2}\delta_{S_t = K}\sigma^2 S_t^2 \right] dt \\ &\geq (S_0 - K)_+ + \int_0^T 1_{S_t \geq K} d\tilde{S}_t = \tilde{\Pi}_T, \end{aligned} \tag{3}$$

donc $\Pi_T \leq (S_T - K)_+$ et ainsi le portefeuille n'atteindra jamais sa cible. Par contre si on prend comme cible $Ke^{\alpha t}$ avec la règle $1_{S_t \geq Ke^{\alpha t}}$ parfois ce sera possible.

CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance)

• Idée: nous avons une somme sous gestion V_t avec contrainte de toujours avoir au moins P_t en portefeuille.

• Éléments constitutifs :
Le portefeuille de valeur V_t
Le plancher de valeur P_t : souvent se comporte comme l'actif sans risque
Le coussin $C_t = V_t - P_t$
Le multiplicateur $m > 0$ (souvent > 1)
La partie investie en actifs risqués $X_t = mC_t$
La partie monétaire $M_t = V_t - X_t$

CPPI

Exemple numérique: V0= 100, m=5, P0=90, r=0,

Scenario 1: S0=100, S1= 95, S2= 90 : OK

Scenario 2: S0=100, S1= 110, S2= 120 : OK

Scenario 3: S0=100, S1= 110, S2= 80 : pas OK
Conclusion: pour respecter le plancher il faut ré-allouer souvent avec un marché supposé continu.

Implémentation : modèle log-normal (Black & Scholes):
$dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dW_t$

Implémentation de l'évolution du CPPI : obtenir l'histogramme du gain du portefeuille; comparaison avec P_t; comparaison du rendement du coussin $\log(C_T/C_0)$ par rapport au rendement de S_t : $\log(S_T/S_0)$

CPPI: approches théoriques

• Question: quelle est l'évolution du coussin C_t; numériquement le rendement est une variable normale, peut-on démontrer ceci ? On doit travailler avec $\frac{C_{t+\Delta t}-C_t}{C_t} \simeq \frac{dC_t}{C_t}$ ... $dC_t = ?$

• hypothèse sur l'actif risqué: log-normal : $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$

• $V_t = P_t + C_t$, $dP_t = rP_t dt$

• Portefeuille autofinancé :
$dV_t = rM_t dt + \frac{X_t}{S_t} dS_t = r(V_t - mC_t)dt + \frac{mC_t}{S_t} dS_t$.
Par ailleurs $dV_t = dP_t + dC_t$. Donc $dP_t + dC_t =$
$r(V_t - mC_t)dt + \frac{mC_t}{S_t} dS_t = r(P_t + C_t)dt - rmc_T dt + mC_t(\mu dt + \sigma dW_t)$

• Donc après simplifications
$\frac{dC_t}{C_t} = (r + m(\mu - r))dt + m\sigma dW_t =: \tilde{\mu} dt + \tilde{\sigma} dW_t$

CPPI

Conclusion $\frac{dC_t}{C_t} = \tilde{\mu} dt + \tilde{\sigma} dW_t$ $\tilde{\mu} = r + m(\mu - r)$
$\tilde{\sigma} = m\sigma$

C_t : actif Black-Scholes.

Ratio de Sharpe : $\frac{\tilde{\mu} - r}{\tilde{\sigma}} = \frac{r + m(\mu - r) - r}{m\sigma} = \frac{\mu - r}{\sigma}$

= ratio de Sharpe de $(S_t)_{t \geq 0}$

CPPI une sorte de produit dérivé ayant un delta de $\Delta_t = \frac{X_t}{S_t}$.
$= m(V_t - P_t)/S_t$

Rq Stratégie de type "trend" (tendance) "convexe" : plus l'actif monte plus on investit dessus.

CPPI

Test numérique : Bachelier

Soit $dS_t = \mu S_t + \sigma dW_t$.

- construire S_t par Euler-Maruyama
- tester les gains / pertes de CPPI pour $m = 5$.
- quelle évolution du coussin C_t ? Et de ratio de Sharpe ? ...

Constant Mix / Constant Rebalanced Portfolio

Déf investir toujours une partie (proportion) λ de la valeur du portefeuille dans l'actif risqué (S_t).

Ex $\lambda \leq 1$ $\lambda \simeq 40\%$, 50%, 60% ...

Question est-ce une stratégie dynamique ? oui

Ex $100 \to 110 \to 120$
$\;\;\; \overset{\shortparallel}{S_0}$

$V_0 = 1000$ € $\lambda = 1/2$

$t=0$ 500 € ss risque
500 € risqué = 5 actifs

$t=1$ 500 € ($r=0$) $\to$ 500 € (ss risque)
5 actifs de valeur $5 \cdot 110 = 550$

$V_1 = 1050$ $\to$ 525 ss risque
$\to$ 525 risque
$\frac{525}{110}$ actifs < 5.

Constant Mix / Constant Rebalanced Portfolio

C'est une stratégie concave/ contrarienne. Elle va à l'encontre de la tendance. Gains marqués si oscillations.

Evolution du portf. const Mix

V_t = valeur $\frac{\lambda V_t}{S_t}$ = # parts actif risqué

$$dV_t = \frac{\lambda V_t}{S_t} dS_t + (V_t - \lambda V_t) r\,dt = \lambda V_t (\mu dt + \sigma dW_t) + (1-\lambda) r V_t dt$$

Donc $$\frac{dV_t}{V_t} = \underbrace{(r + \lambda(\mu - r))}_{\tilde{\mu}} dt + \underbrace{\lambda\sigma}_{\tilde{\sigma}} dW_t = \tilde{\mu}\,dt + \tilde{\sigma}\,dW_t$$

Sharpe : $\frac{\mu - r}{\sigma}$ = ratio de S_t.

Constant Mix / Constant Rebalanced Portfolio

Comme soit $\lambda < 1$ c'est diff de CPPI. Cst Mix est un CPPI ss plancher cst mix (λ) = CPPI$(m = \lambda, P_t \equiv 0)$.

Calcul de β de V_t : $\beta = \frac{\mathrm{cov}(R_{V_t}, R_{S_t})}{\mathrm{var}(R_{S_t})}$

$$= \frac{\mathrm{cov}\left([r + \lambda(\mu - r)]\Delta t + \lambda\sigma \mathcal{N}_1(0, \Delta t),\ \mu\Delta t + \sigma \mathcal{N}_1(0, \Delta t)\right)}{\mathrm{Var}(\mu\Delta t + \sigma\mathcal{N}(0, \Delta t))}$$

$$= \frac{\lambda\sigma^2 \Delta t}{\sigma^2 \Delta t} = \lambda < 1.$$ ss-exposé au marché.

TP: implémentation.

Trend following vs. contrarian strategies

Analyse 1: modèle de Black & Scholes: $dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dW_t$

Etudier la limite en $\lambda \to 0$: constater quel est le signe du "trend" (cf. formule analytique de S_t) par rapport au signe initial de ce trend.

Analyse 2: exponential Ornstein-Uhlenbeck

Soit $S_t = e^{U_t}$, $dU_t = (\theta_1 - \theta_2 U_t)dt + \theta_3 dW_t$.
autre formule : $dS_t/S_t = (\tilde{\theta}_1 - \theta_2 \ln(S_t))dt + \theta_3 dW_t$, $\tilde{\theta}_1 = \theta_1 + \theta_3^2/2$

- construire U_t par Euler-Maruyama, ensuite S_t
- tester les gains / pertes de $CM(\lambda = 0.5)$ vs $CPPI(m = 2, P = 0)$.

Analyse 3: données réelles

Tester le comportement de $CM(\lambda = 0.5)$ vs $CPPI(m = 2, P = 0)$ sur le CAC40 pendant une période de 5 ans, ou 10 ans ou 20 ans.

CM vs CPPI : résultats analyse 2

Exp(OU) : $S_t = e^{U_t}$, $dU_t = (\theta_1 - \theta_2 U_t)dt + \theta_3 dW_t$.
Résultats pour $\theta = (0, 20, 1)$, $V(0) = 1000$, $P = 0$: