Rappels théorie classique de l'évaluation des produits dérivés

Master 2, Université Paris Dauphine - PSL 2019+

Gabriel Turinici

Référence générale :

livre "Éléments de Calcul Stochastique pour l'Évaluation et la Couverture des Actifs Dérivés – avec Exercices Corrigés, Travaux Pratiques et Études de Cas" de Imen Ben Tahar, José Trashorras, Gabriel Turinici
ISBN-13: 978-2340009998

- version papier `https://www.amazon.fr/gp/product/2340009995`
- version online `https://turinici.com`

Exemple de produits dérivés: contrats forward

- Achat d'une maison (ticket de métro, voiture, etc.)
- Prix en janv. de l'année T: M=1'000'000 EUR
- Achat sera effectué en Janv. T+1 au prix P
- Taux d'intérêt sans risque: r=5%

  Quel est le prix P acceptable pour les deux parties ?

Evaluation de produits dérivés: principes

Exemple de produits dérivés: contrats forward

- a/ si $P > 1050000$ $(M \cdot (1 + r))$ alors l'acheteur préfère s'endetter tout de suite et acheter maintenant
- b/ si $P < 1050000$ $(M \cdot (1 + r))$ alors le vendeur préfère vendre tout de suite
- Le prix de la transaction $P = M(1 + r)$. Conclusion: le prix d'un forward/future sur un actif S est $F_t(S, T) = S_t e^{r(T-t)}$.

Principe de valuation

Absence d'arbitrage: il n'est pas possible de gagner de l'argent sans risque c'est à dire qu'il n'y a pas moyen d'être surs de gagner de l'argent avec un investissement initial nul.

(hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage)

Theorem

Soit deux stratégies S_1 et S_2. Alors si à un instant futur T on a $S_1 = S_2$ en tout état du monde (i.e., comme v.a.) alors $S_1 = S_2$ pour tout temps $t \leq T$ et tout état du monde.

Proof.

Sinon on construit un arbitrage en vendant le plus cher et en achetant le moins cher. $\square$

Hedging statique

Une application de la proposition précédente permet de donner un prix du contrat future par la construction d'un HEDGING STATIQUE.

soit Π_1 le portefeuille contenant
• vente d'un contrat future sur l'actif S_t écrit pour un prix P payable en $t = T$
• 1 actif acheté au temps $t = 0$ et prix S_0
• une dette de S_0 euros au taux r à rembourser au temps $t = T$
soit Π_2 le portefeuille contenant
• une quantité d'argent $Pe^{-rT} - S_0$ euros en $t = 0$
Comme en $t = T$ on aura

$$\Pi_1(T) = -S_T + P + S_T - S_0 e^{rT} = P - S_0 e^{rT} = e^{rT}(Pe^{-rT} - S_0) = \Pi_2(T)$$

on doit avoir pareil en $t = 0$

$$0 = \Pi_1(0) = \Pi_2(0) = \Pi_2(T)e^{-rT} = Pe^{-rT} - S_0 \text{ donc } P = S_0 e^{rT}.$$

Options: rappels

Definition

Un call européen de maturité T et strike K est le droit d'acheter l'actif S au prix K à l'instant T.

Vocabulaire:
utilisation du droit = exercice
options put = option de vente
options américaines = exercice possible à tout moment avant T.

Options: parité call-put par hedging statique

Soit Π le portefeuille contenant $+1$ put, -1 call, 1 actif sous-jacent S_t (toutes les options même strike K et maturité T).
Valeur en $t = T$:
$\Pi_T = (S_T - K)_- - (S_T - K)_+ + S_T = K$

Donc en $t < T$: $\Pi_t = Ke^{-r(T-t)}$; ceci donne la relation de parité call-put

$$P_t - C_t + S_t = Ke^{-r(T-t)}.$$

Options: prix

Prix d'une option: par AOA (absence d'opportunité d'arbitrage) le prix à l'instant final sera
pour un call $C(S,T) = (S-K)_+$
pour un put $C(S,T) = (S-K)_-$

Par contre pour $t < T$ le prix est en général inconnu !! Il faut un modèle.

Options: rappels des outils mathématiques

cf. livre "Éléments de calcul stochastique pour l'évaluation et la couverture des actifs dérivés" (`https://turinici.com`)

- mouvement brownien
- intégrale d'Ito, formule d'Ito
- équations différentielles stochastiques

Portefeuille auto-financé

Quantités $\theta_t^0, \theta_t^1, ..., \theta_t^N$. Actifs: $S_t^0, S_t^1, ..., S_t^N$

Convention : indice 0 pour actif sans risque $dS_t^0 = rS_t^0 dt$, $r=$ taux sans risque (connu, fixe).
Valeur du portefeuille $\Pi_t = \theta_t \cdot S_t = \sum_{k=0}^N \theta_t^k S_t^k$

Notion importante : autofinancement

Un portefeuille est dit auto-financé (entre 0 et T) s'il n'y ni ajout ni retrait d'argent entre 0 et T.

année	Cash 5%	actif S
t=0	10000 EUR	100 actifs au prix 100 EUR chacun
t=1	10'500 EUR	100 actifs au prix 120 EUR chacun
t=1	??? EUR	150 actifs au prix 120 EUR chacun

Ici ??? est la seule valeur possible si redistribution faite 1 fois en $t = 1$.

Portefeuille auto-financé

La redistribution faite en "$t+1$" au prix S_{t+1} entraine
$\theta_t \cdot S_{t+1} = \theta_{t+1} \cdot S_{t+1}$.
Donc $\Pi_{t+1} - \Pi_t = \theta_{t+1} \cdot S_{t+1} - \theta_t \cdot S_t = \theta_t \cdot (S_{t+1} - S_t)$.

Donc $\Pi_T = \Pi_0 + \sum_{t=1}^{T-1} \Pi_{t+1} - \Pi_t = \Pi_0 + \sum_{t=1}^{T-1} \theta_t \cdot (S_{t+1} - S_t)$

Par passage à la limite on obtient l'intégralle d'Ito : $\Pi_T = \Pi_0 + \int \theta_t \cdot dS_t$ ou encore $d\Pi_t = \theta_t \cdot dS_t$

Si on avait $\Pi_{t+1} - \Pi_t = \theta_{t+1/2} \cdot (S_{t+1} - S_t)$ c'est l'intégrale de Stratanovich qui était obtenue !

Portefeuille auto-financé

Definition du portefeuille auto-financé

Un portefeuille Π_t est dit auto-financé si pour tout $t \geq 0$
$\Pi_t = \Pi_0 + \int_0^T \theta_u \cdot dS_u$ ou encore $d\Pi_t = \theta_t \cdot dS_t$. Pour $Z = \Pi_T = \theta_T \cdot \S_t$
on dira que la stratégie θ_t finance Z.

Rappel $\Pi_t = \theta_t \cdot S_t$. La condition d'auto-financement permet de calculer la dérivée du produit de manière beaucoup plus aisée que le calcul que donnerait la formule de Ito !!)

Remarque: θ_t est pris "prédictible" (mesurable par rapport à la σ-algèbre générée par les processus adaptés continues à gauche.)

Portefeuille auto-financé: changement de numéraire

Soit R_t un processus tel que $R_t > 0$ p.s. i.e. un numéraire,

Exemple monnaie de terme de compte eur/FR eur/USD, ...

Prop Un portefeuille auto-financé le reste après cgt de numéraire

Defn cgt de numéraire $\theta_t \to \theta_t$ $\tilde{S}_t = S_t / R_t$

$\tilde{\Pi}_{t+1} - \tilde{\Pi}_t = \theta_{t+1} \frac{S_{t+1}}{R_{t+1}} - \theta_t \frac{S_t}{R_t} = \theta_t \frac{S_{t+1}}{R_{t+1}} - \theta_t \frac{S_t}{R_t}$ ✓

$\theta_{t+1} \cdot \frac{S_{t+1}}{R_{t+1}} = \theta_t S_{t+1} / R_{t+1}$ $\theta_t (\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t)$

Portefeuille auto-financé

Lemme Tout portefeuille peut être rendu auto-financé en rajoutant de l'actif ss risque

Défn on rajoute $\tilde{\theta}^0_t$ de l'actif ss risque $\tilde{\Pi}_t = \Pi_t + \tilde{\theta}^0_t \cdot S^0_t$

Alors $d\tilde{\Pi}_t = d\Pi_t + d(\tilde{\theta}^0_t S^0_t) = d\Pi_t + (d\tilde{\theta}^0_t)S^0_t + \tilde{\theta}^0_t(dS^0_t)$

(par Ito car $dS^0_t = rS^0_t dt$!) (on veut $d\tilde{\Pi}_t = (\theta_t + \tilde{\theta}^0_t) \cdot dS_t$

Il suffit de prendre $\tilde{\theta}^0_t$ solution de

$$\theta_t \cdot dS_t + \cancel{\tilde{\theta}^0_t dS^0_t} = d\Pi_t + (d\tilde{\theta}^0_t)S^0_t + \cancel{\tilde{\theta}^0_t dS^0_t}$$

$\Rightarrow d\tilde{\theta}^0_t = \dfrac{\theta_t \cdot dS_t - d\Pi_t}{S^0_t}$ sol $\tilde{\theta}^0_t = \int_0^t \frac{\theta_u}{S^0_u} dS_u - \int_0^t \frac{d\Pi_u}{S^0_u}$

Modèle pour l'evolution d'un actif financier

On utilisera le modèle dit 'log-normal' ou encore de Black-Scholes.

• le constat est le même que pour la gestion de portefeuille classique, on fait des hypothèses sur les rendements: $\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t}$ qu'on suppose agrégation d'une tendance $\mu \Delta t$ et des incréments aléatoires $\sigma(W_{t+\Delta t} - W_t)$. A la limite $\Delta t \to 0$ on obtient

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

• Vocabulaire: $\sigma=$ "volatilité" (log-normale), μ : tendance

• D'autres modèles existent par exemple celui de Vasicek'77, surtout utilisés pour les produits de taux $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$, ou celui de Bachelier (dit model "normal") $dS_t = \mu dt + \sigma dW_t$.

Delta hedging pour les options

• On cherche le prix d'une option sous la forme prix $C_t = C(t, S_t)$.
• On sait connait la valeur $C(T, S_T)$ car donnée par contrat, par exemple pour un call européen $C(T, S_T) = (S_T - K)_+$
• Soit le portefeuille suivant Π_t composé de 1 call, Δ_t parts de sous-jacent S_t (Δ_t à préciser plus tard) et le reste, c'est à dire $\Pi_t - C_t - \Delta_t S_t$ en cash.
• Comme le portefeuille est auto-financé on peut écrire $d\Pi_t = 1dC_t + \Delta_t dS_t + (\Pi_t - C_t - \Delta_t S_t)rdt$. Par la formule de Ito on aura

$$d\Pi_t = \partial_t C(t, S_t)dt + \partial_S C_t dS_t + \Delta_t dS_t + \frac{1}{2}\partial_{SS} C_t \sigma^2 S_t^2 dt + (\Pi_t - C_t - \Delta_t S_t)rdt. \tag{2}$$

Ceci veut dire que si on met $\Delta_t = -\partial_S C(t, S_t)$ l'écriture de $d\Pi_t$ n'aura que des termes en dt donc il sera déterministe. Or, par AOA seule évolution déterministe est rdt donc $d\Pi_t = \Pi_t rdt$. Ainsi:

$$d\Pi_t = \left[\partial_t C_t + \frac{1}{2}\partial_{SS} C_t \sigma^2 S_t^2 + r(\Pi_t - C_t + \partial_S C_t S_t)\right] dt = r\Pi_t dt \tag{3}$$

Equation Black Scholes

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0 & \leftarrow \text{eq Black-Scholes} \\ C(T, S) = (S-K)_+ & \leftarrow \text{pour 1 call européen} \\ \qquad\quad (S-K)_- & \leftarrow \text{pour 1 put européen} \end{cases}$$

Ex C = option sur 2 sous-jacents de pay-off $f(S^1, S^2)$.

Eq d'évolution $\frac{dS_t^1}{S_t^1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1$ $\frac{dS_t^2}{S_t^2} = \mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^2$

$dW_t^1 \cdot dW_t^2 = \rho\, dt$

Ex $f(S^1, S^2) = (\eta_1 S_1 + \eta_2 S_2 - K)_+$

Ref Hull "Option, futures ..." pour formule explicite pour $\sigma = cst$, $r = cst$.

Neutralité par rapport au risque

Exemples de risques: en bourse (aversion), au loto/ casino (propension); entre le deux: neutralité

Exemple : combien sommes nous prêts à payer pour jouer à un jeu qui offre e.g. 50% chances de gagner 10′000EUR et 50% chances de rien gagner ?

Autre exemple: que choisiriez vous entre : "un jeux avec 50% chances de gagner 1 million d'euros et 50% chances de rien gagner" et "500′000 eur en espèces" (sans aucune incertitude) ? Et si le 2e fait gagner 200′000eur seulement ?

Neutralité par rapport au risque: outils mathématiques

Thm (Girsanov) Soit le processus L_t donné par

$L_t = \exp\left(\int_0^t h_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t h^2(s) ds \right)$ où h_s est un processus adapté borné. Alors L_t est l'unique solution de $\frac{dL_t}{L_t} = h_t dW_t$ avec $L_0 = 1$ et $\mathbb{E}(L_t) = 1$. De plus L_t est une martingale.

On introduit la mesure $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(1_A L_T)$. Sous cette mesure le processus $\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t h(s) ds$ est un mvt brownien.

Rq On obtient $d\tilde{W}_t = dW_t - h\, dt$

Valuation d'option par la probabilité risque neutre

$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$ Δ- hedging pour une option C_t de pay-off $h(S_T)$.

On suppose qu'il est possible de repliquer C_t avec ↗ actifs ss risque ↘ du ss jacent.

↓

hypothese de marché complet.

Donc si η_t = quantité d'actif ss risque R_t : $\frac{dR_t}{R_t} = r\,dt$

Δ_t = quantité de ss jacent S_t

$C_t = \eta_t R_t + \Delta_t S_t$. $dC_t = \eta_t dR_t + \Delta_t dS_t$

On prend ds Girsanov ce qu'il faut $\left(h_t = -\frac{\mu - r}{\sigma} \right)$ pour que

$d\tilde{W}_t = dW_t - h\,dt$ et $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t = \mu dt + \sigma(d\tilde{W}_t + h dt)$
$= r dt + \sigma d\tilde{W}_t$

Valuation d'option par la probabilité risque neutre

$dC_t = \eta_t dR_t + \Delta_t dS_t = \underline{\eta_t r R_t dt + \Delta_t S_t (r dt} + \sigma d\tilde{W}_t)$

$dC_t = r C_t dt + \Delta_t S_t \sigma d\tilde{W}_t$

Soit $\tilde{C}_t = \frac{C_t}{R_t}$ alors $d\tilde{C}_t = d\left(\frac{C_t}{R_t}\right) = \cancel{0 \cdot dt} + \frac{\Delta_t S_t \sigma}{R_t} d\tilde{W}_t$

Donc $\frac{C_t}{R_t}$ = martingale en particulier $\frac{C_t}{R_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{C_T}{R_T} \middle| \mathcal{F}_t \right)$

mesure risque-neutre

Donc $\begin{cases} \underline{C_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(C_T e^{-\int_t^T r(s) ds} \mid S_t = \text{valeur de } S \text{ à l'instant } t \right)} \\ \text{équation pour } S : \quad \frac{dS_t}{S_t} = r\,dt + \sigma d\tilde{W}_t \end{cases}$

↓ évaluation par Monte-Carlo

Rq $C_T = h(S_T)$ = fonction connue.

Rq $\tilde{S}_t = S_t / R_t$ satisfait $\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = \sigma d\tilde{W}_t$.

Valuation pour options américaines

1/ Call européen / call américain

Parité $P_t = C_t - S_t + Ke^{-r(T-t)} \Rightarrow C_t = \underbrace{P_t}_{\geq 0} + S_t - Ke^{-r(T-t)}$

$\geq S_t - Ke^{-r(T-t)} \geq \underbrace{S_t - K}_{\text{gain si exercice à } t=T \text{ (si } S_t > K)}$

Donc il n'est jamais optimal d'exercer un call (au pire il y aura une vente du call sur le marché).

Valuation options américaines: arbitrage

rq : c'est portef d'arbitrage si $C_t^A > C_t^E$

Cas particulier portef K euros

Short 1 S_t

long 1 C_t (europ.)

Bilan en T : a) si $S_T > K$

$Ke^{r(T-t)} - S_T + S_T - K$

$= K(e^{r(T-t)} - 1) \geq 0$

b) si $S_T \leq K$: $Ke^{r(T-t)} - S_T + 0 \geq$

$\geq Ke^{r(T-t)} - K \geq 0$.

couverture

→ on est vendeur (en $t=0$) d'une option américaine au prix d'une option européenne
C_t^A $C_t^E = C_t$

→ l'acheteur l'exerce à $t<T$ (bien sur $C_t > S_t - K$)

→ (nous avons "hedgé" C_t)

Marche à suivre

1/ on vend 1 option européenne | américaine au prix C_t car $C_t^A \geq C_t$

2/ on achète S_t qu'on livre au prix K

Bilan avant : short 1 call américain

après : short 1 call américain + $\underbrace{C_t - S_t + K}_{>0}$

Donc les call américains ne sont jamais exercés donc

$C_t^A = C_t^E$.

Put américain

$$P_t = \underbrace{C_t}_{\geq 0} - S_t + K e^{-r(T-t)} \geq K e^{-r(T-t)} - S_t \leq (K - S_t)_+$$

Gain d'exercice : $(K - S_t)_+ \geq K e^{-r(T-t)} - S_t$
(si $K \geq S_t$)

Donc il peut être optimal d'exercer un put américain.

Pour 1 put américain le prix P_t^A doit être $\geq (K - S_t)_+$

donc $P_t^A \neq P_t^E$ (en général).

Analyse du portefeuille de réplication

Π_t : 1 option (put) et Δ_t parts de S_t

Si $d\Pi_t > r \Pi_t dt$ donc on demande de l'argent (Π_t) au taux r et on finance le portefeuille Π_t

Put américain

Rq Π_t est sous notre contrôle car c'est l'acheteur qui décide si oui ou non il exerce.

Conclusion : il n'est pas possible que $d\Pi_t > r\Pi_t dt$, donc $d\Pi_t \leq r\Pi_t dt$.

Tentative d'arbitrage pour $d\Pi_t < r\Pi_t dt$: il faudrait vendre le portefeuille Π_t et le mettre à la banque (taux "r"). Cette opération n'a pas de résultat connu si $P_t^A <$ gain d'exercice

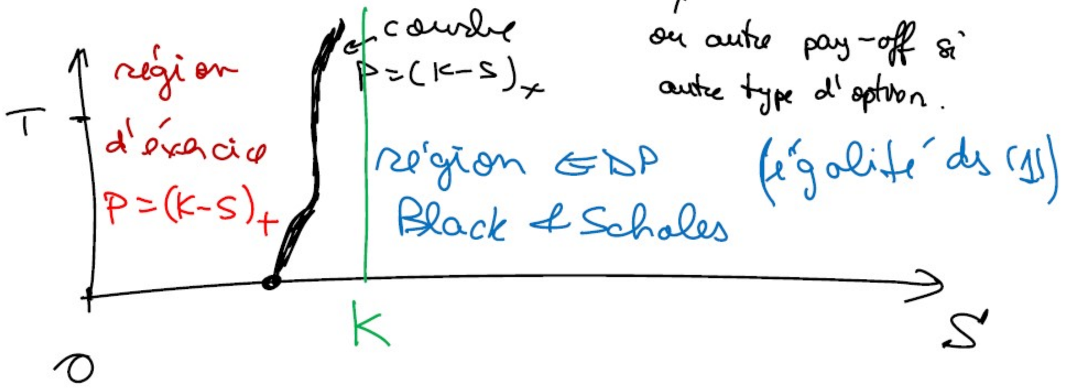
Conclusion
- si exercice $P_t^A =$ gain d'exercice donc en gén $P_t^A \geq$ gain d'exercice
- toujours $d\Pi_t \leq r\Pi_t dt$

Black-Scholes pour put américain

$P(t,S) =$ prix d'un put américain satisfait

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP \leq 0 \quad \forall t,S \quad (1) \\ \text{si inégalité stricte alors } P(t,S) = (K-S)_+ \end{cases}$$

ou autre pay-off si autre type d'option.



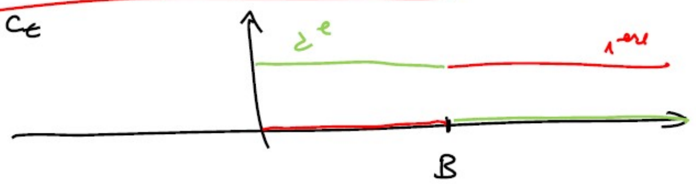
Options digitales

Exemples

call ① / put ②

$$\text{Pay-off} = \begin{cases} 0 & \text{si } S_T < B \quad \text{connu} \\ 100 & \text{si } S_T \geq B \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 0 & \text{si } S_T \geq B \\ 100€ & \text{si } S_T < B \end{cases}$$

C_t $\qquad$ P_t



$$C_T + P_T = 100$$

$$C_t + P_t = 100\, e^{-r(T-t)}$$