M2 ISF : Gestion de portef P21

- 21/10/20 -

Δ-hedging : adapter le portef

contenant
- (−1) option
- Δ_t parts de ss-jacent
- cash

pendant le tps. de simulation de

0 à T.

$$\Delta_t = \underbrace{\frac{\partial C_t}{\partial S}}_{\text{fonction}} (t, S_t) \quad \left(\text{dépend aussi de } \sigma \right)$$

connus

inconnue car concernant le futur !

Question et si on se trompe de σ ?

A faire : simulation avec σ réalisé différent de celui supposé.

Constat empirique : si volatilité réalisée < volatilité prédite

alors GAIN (systématiques)

sinon perte

Trading de volatilité : ce portef. est très sensible à la volatilité de manière ~~bi~~ directionnelle.

C'est donc un support à un pari sur la volatilité.

$t=0$ si $\sigma_R < \sigma_i$

alors vendre option. et faire Δ-hedging.

en $t=T$ port rend + si on a raison.

volatilité σ_i implicite = vol. donnée par formule BLS qui donne le prix de marché

Si au contraire $\sigma_r > \sigma_i$; il faut au contraire acheter une option et faire du Δ-hedging ($-\frac{\partial C_t}{\partial S}(t, S_t)$).

Pourquoi ?

Rappel lettres grecques en math fi : prix option = C_t

→ dérivé de C_t p/r à S : "Δ" (delta) $\frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t)$

→ dérivé p/r au temps $\frac{\partial C}{\partial t}(t, S_t) = \Theta$ ("thêta")

→ dérivé d'ordre 2 p/r à S $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \Gamma$ ("gamma")

~~Eq de BFS~~

$$\partial_t C + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_{SS} C + rS\partial_S C - rC = 0$$

$$\boxed{\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma + rS\Delta - rC = 0}$$ au point (t, S_t)

Rq ds Θ, Δ, Γ apparait σ_i, sont des fonctions

ds S_t apparait σ_r ! $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma_r dW_t$

Evolution du portefeuille de Δ-hedging :

- (-1) call $C^i(t, S_t)$ $\rightarrow$ valeur Π_t
- Δ_t^i parts de S_t
- cash de valeur $\underbrace{\Pi_t - \Delta_t^i \cdot S_t + C_t^i}$ $\rightarrow$ prix de l'option

X_t = cash
$dX_t = r X_t \, dt$

Total Π_t

Evolution de Π_t (rappel Π_t = auto-financé !)

$$d\Pi_t = (-1)\, dC_t^i + \Delta_t^i \, dS_t + r(\Pi_t - \Delta_t^i S_t + C_t^i)\, dt$$

$$dC_t^i(t, S_t) \overset{\text{Itô}}{=} \underbrace{\frac{\partial C^i}{\partial t}(t, S_t)}_{\rightarrow\ \Theta_t} dt + \underbrace{\frac{\partial C^i}{\partial S}(t, S_t)}_{\rightarrow\ \Delta} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C^i}{\partial S^2}(t, S_t) \cdot \sigma_R^2 S_t^2 \, dt$$

Donc
$$d\Pi_t = (-1)\left(\Theta^i dt + \cancel{\Delta_t^i dS_t} + \frac{\sigma_R^2 S_t^2}{2} \Gamma^i dt \right) + \cancel{\Delta_t^i dS_t} + r(\Pi_t - \Delta_t^i S_t + C_t^i)\, dt$$

$$= \Big(\underbrace{-\Theta^i} \underbrace{- \frac{1}{2} \sigma_R^2 S_t^2 \Gamma^i}_{\text{mais avec } \sigma_i^2} + r\Pi_t \underbrace{- r\Delta_t^i S_t + rC_t^i} \Big) \cdot dt$$

Mais $\Theta^i + \frac{1}{2} \sigma_i^2 S_t^2 \Gamma^i + r\Delta^i S = rC^i$

Donc, en remplaçant rC_t^i par $\Theta + \frac{1}{2} \cdots \Gamma + \Delta S$

on obtient

$$d\Pi_t = \left[r\Pi_t + \frac{1}{2} S_t^2 \Gamma^i \underbrace{\left(\sigma_i^2 - \sigma_r^2\right)}_{\text{signe important}} \right] dt$$

Si on note $\tilde{\Pi}_t = \Pi_t$ actualisé $= \Pi_t e^{-rt}$

$$d\tilde{\Pi}_t = \Big[0 + \underbrace{\frac{1}{2} (\sigma_i^2 - \sigma_r^2) S_t^2 \Gamma^i e^{-rt}}_{} \Big] dt$$

le fait que Π_t gagne ou perd dépend que du signe de $\sigma_i^2 - \sigma_r^2$ c'est à dire du fait que σ_i^2 est plus grand ou plus petit que σ_r^2.

$$d\tilde{\Pi}_t \overset{\text{Itô}}{=} \cancel{-r\underbrace{e^{-rt}\Pi_t}_{\tilde{\Pi}_t}} + e^{-rt} d\Pi_t = e^{-rt}\Big[\cancel{r\Pi_t} + \frac{1}{2} S_t^2 \Gamma^i (\sigma_i^2 - \sigma_r^2) \Big] dt = \frac{e^{-rt}}{2} S_t^2 \Gamma^i (\sigma_i^2 - \sigma_r^2) dt$$