Étude de cas: β-slippage

Gabriel Turinici

May 2021

1 Introduction

Un ETF (Exchange traded Fund) est un produit négociable. Nous discutons ici les ETF dits "short" ou "leveraged", notés V_t qui se définissent par rapport à un actif S_t de la manière suivante: le rendement journalier de V_t est β fois le rendement journalier de S_t c'est à dire

$$\log(V_{t+\Delta t}/V_t) = \beta \log(S_{t+\Delta t}/S_t) \tag{1}$$

ou encore, en forme presque équivalente:

$$\frac{V_{t+\Delta t} - V_t}{V_t} = \beta \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t}. \tag{2}$$

Par exemple si S_t a fait $+5\%$ et $\beta = -1$ (ont dit que c'est un ETF short) alors le rendement de l'ETF sera -5%. Si c'est un leveraged avec $\beta = 2$ (leveraged) alors le rendement sera $+10\%$.

2 A faire

Pour nous S_t sera le CAC40.

2.1 Observations empiriques

1/ Identifier sur le marché francais des ETF du CAC40, un short et un leveraged, dessiner les évolutions de tout le monde.

2/ Dessiner aussi le rapport entre le rendement journalier de l'ETF et celui du CAC40, chaque jour (axe x = jours, axe y=ratio des rendements du jour).

2'/ Tracer aussi un histogramme de ce rapport.

3/ comparer la valeur d'un portefeuille qui investit 1000EUR dans le CAC40 et un autre dans chaque ETF, entre 1/1/2020 et 15/5/2020.

2.2 Etude théorique

Maintenant trouver une explication théorique en supposant que $dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dW_t$.

A/ pour commencer trouver l'équation de dV_t et celle de V_T

B/ Comparer $\log(V_T/V_0)$ avec $\beta \log(S_T/S_0)$ et dire pour quelles valeurs de β on est surs que le premier sera inférieur au 2eme.

3 Correction : étude théorique

Tout d'abord un petit exo pour comprendre: soit un sous-jacent qui evolue ainsi $100 \to 80 \to 100$. Ainsi il revient à sa valeur initiale. Or, on peut vérifier que pour $\beta = -1$ l'ETF correspondant évolue ainsi $100 \to 120 \to 90$ (donc il ne revient pas au point de départ mais essuie une perte); pour $\beta = 2$ l'évolution est $100 \to 60 \to 90$ donc à nouveau pas de retour au point de départ mais perte.

3.1 Question A

Puisque $\frac{V_{t+\Delta t}-V_t}{V_t} = \beta \frac{S_{t+\Delta t}\ -\ S_t}{S_t}$, en faisant tendre Δt vers 0 : $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{V_{t+\Delta t}\ -\ V_t}{\Delta t}}{V_t}$ $= \beta \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{S_{t+\Delta t}\ -\ S_t}{\Delta t}}{S_t}$, on obtient ainsi : $\frac{dV_t}{V_t} = \beta\ \frac{dS_t}{S_t}$

En utilisant l'équation de S_t, on obtient : $\frac{dV_t}{V_t} = \beta\ (\mu dt + \sigma dW_t)$ dont la solution est : $V_t = V_0\ e^{\ (\beta\mu - \frac{\beta^2\sigma^2}{2})\ t\ +\ \beta\sigma W_t}$

En particulier $V_T = V_0\ e^{\ (\beta\mu\ -\ \frac{\beta^2\sigma^2}{2})\ T\ +\ \beta\sigma W_T}$

3.2 Question B

Pour comparer les deux rendements on doit comparer $\log(V_T/V_0)$ et $\beta \log(S_T/S_0)$. Vu les informations empiriques, on cherche β tel que $\log(V_T/V_0) < \beta \log(S_T/S_0)$. Mais puisque $S_T = S_0\ e^{\ (\mu\ -\ \frac{\sigma^2}{2})\ T\ +\ \sigma W_T}$ l'inégalité s'écrit $(\beta\mu - \frac{\beta^2\sigma^2}{2})\ T + \beta\sigma W_T < \beta((\mu\ -\ \frac{\sigma^2}{2})\ T\ +\ \sigma W_T)$ ou encore $-\frac{\beta^2\sigma^2}{2}T < -\frac{\beta\sigma^2}{2}T$ ce qui se réduit à $\beta^2 > \beta$ qui nous conduit à $\beta > 1$ ("leveraged") ou $\beta < 0$ ("short").

3.3 Conclusions

En fait on constate qu'un tel produit ne fait pas sur le long terme ce qu'on attend de lui. Par contre sur le court de terme les différences sont petites. Par ailleurs on peut montrer que le produit V_t n'est pas un produit compatible avec AOA sur le même marché que S_t. En effet, en pratique on peut seulement acheter des ETF (et vendre ce qu'on a acheté) mais pas les vendre à découvert ce qui créerait des opportunités d'arbitrage. C'est en fait ceci la rémunération des "market makers" sur les ETF.