Stratégies dynamiques de portefeuille: (Stop-Loss), CPPI, Constant Mix

Master 2

Université Paris Dauphine

Gabriel Turinici

Référence générale :
livre "Éléments de Calcul Stochastique pour l'Évaluation et la Couverture des Actifs Dérivés – avec Exercices Corrigés, Travaux Pratiques et Études de Cas" de Imen Ben Tahar, José Trashorras, Gabriel Turinici
ISBN-13: 978-2340009998

- version papier https://www.amazon.fr/gp/product/2340009995
- version online https://turinici.com

Stop-Loss

Idée: être actif seulement si supérieur à un niveau donné K, limiter les risques. Une sorte de delta hedging avec $\Delta_t = 1_{S_t \geq K}$.
Portefeuille Stop-Loss auto-financé Π_t est d'équation

$$d\Pi_t = 1_{S_t \geq K} dS_t + r(\Pi_t - 1_{S_t \geq K} S_t)dt \tag{1}$$

donc pour l'actualisation $\tilde{\Pi}_t = e^{-rt}\Pi_t$: $d\tilde{\Pi}_t = ... = 1_{S_t \geq K} d\tilde{S}_t$; si $\Pi_0 = (S_0 - K)_+$:

$$\tilde{\Pi}_T = (S_0 - K)_+ + \int_0^T 1_{S_t \geq K} d\tilde{S}_t. \tag{2}$$

Idéalement on voudrait un gain égal à $(S_T - K)_+$. Montrons qu'en réalité cet gain est inférieur i.e. $\Pi_T \leq (S_T - K)_+$.

Stop-Loss

Pour $e^{-rt}(S_t - K)_+ = (\tilde{S}_t - Ke^{-rt})_+$ on écrit Ito :

$$\begin{aligned} & e^{-rT}(S_T - K)_+ = (S_0 - K)_+ + \int_0^T 1_{S_t \geq K} d\tilde{S}_t \\ & + \int_0^T \left[r 1_{S_t \geq K} K e^{-rt} + \frac{1}{2}\delta_{S_t = K}\sigma^2 S_t^2 \right] dt \\ & \geq (S_0 - K)_+ + \int_0^T 1_{S_t \geq K} d\tilde{S}_t = \tilde{\Pi}_T, \end{aligned} \tag{3}$$

donc $\Pi_T \leq (S_T - K)_+$ et ainsi le portefeuille n'atteindra jamais sa cible. Par contre si on prend comme cible $Ke^{\alpha t}$ avec la règle $1_{S_t \geq Ke^{\alpha t}}$ parfois ce sera possible.

CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance)

• Idée: nous avons une somme sous gestion V_t avec contrainte de toujours avoir au moins P_t en portefeuille.

• Éléments constitutifs :
Le portefeuille de valeur V_t
Le plancher de valeur P_t : souvent se comporte comme l'actif sans risque
Le coussin $C_t = V_t - P_t$
Le multiplicateur $m > 0$ (souvent > 1)
La partie investie en actifs risqués $X_t = mC_t$
La partie monétaire $M_t = V_t - X_t$

CPPI

Exemple numérique: V0= 100, m=5, P0=90, r=0,

Scenario 1: S0=100, S1= 95, S2= 90 : OK

Scenario 2: S0=100, S1= 110, S2= 120 : OK

Scenario 3: S0=100, S1= 110, S2= 80 : pas OK
Conclusion: pour respecter le plancher il faut ré-allouer souvent avec un marché supposé continu.

Implémentation : histogramme du gain du portefeuille; comparaison avec P_t; comparaison du rendement du coussin $\log(C_T/C_0)$ par rapport au rendement de S_t : $\log(S_T/S_0)$

CPPI

Rappels: CPPI

Portefeuille : P_t plancher ss risque
C_t coussin, risqué

- Évolution du coussin ?

$P_t = P_0 e^{rt}$ $C_t = ?$

- Hypothèse sur l'actif risqué: Black-Scholes (log normal)

S_t : $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$ (Rdt log-normal)

$\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t}$: normale (Δt petit)

$dC_t = ?$

Question Rdt de C_t ? $\frac{C_{t+\Delta t} - C_t}{C_t} \sim$ (loi ?)

TP : loi normale.

CPPI

Théoriquement : comprendre ceci.

$V_t = P_t + C_t$ $dP_t = rP_t dt$ (hypothèse)

↳ portef auto-financé $V_t = M_t + X_t$

$[\, dV_t = rM_t dt + \frac{X_t}{S_t} dS_t = r(V_t - mC_t)dt + \frac{mC_t}{S_t} dS_t$

$[\, dV_t = dP_t + dC_t$. Donc $\cancel{dP_t} + dC_t = r(V_t - mC_t) dt +$

$mC_t \frac{dS_t}{S_t} = r(\cancel{P_t} + C_t)dt - rmC_t dt + mC_t(\mu dt + \sigma dW_t)$

Donc $\frac{dC_t}{C_t} = \underbrace{[r + m(\mu - r)]}_{\tilde{\mu}} dt + \underbrace{m\sigma}_{\tilde{\sigma}} dW_t = \tilde{\mu} dt + \tilde{\sigma} dW_t$

CPPI

Conclusion $\frac{dC_t}{C_t} = \tilde{\mu} dt + \tilde{\sigma} dW_t$ $\quad \tilde{\mu} = r + m(\mu - r)$, $\tilde{\sigma} = m\sigma$

C_t : actif Black-Scholes.

Ratio de Sharpe : $\frac{\tilde{\mu} - r}{\tilde{\sigma}} = \frac{r + m(\mu - r) - r}{m\sigma} = \frac{\mu - r}{\sigma}$

$=$ ratio de Sharpe de $(S_t)_{t \geq 0}$

CPPI une sorte de produit dérivé ayant un delta de $\delta_t = \frac{X_t}{S_t}$.
$= m(V_t - P_t)/S_t$

Rq stratégie de type "trend" (tendance) "convexe" : plus l'actif monte plus on investit dessus.

CPPI

Analyse 2: Bachelier

Soit $dS_t = \mu S_t + \sigma dW_t$.
- construire S_t par Euler-Maruyama
- tester les gains / pertes de CPPI pour $m = 5$.
- quelle évolution du coussin C_t ? Et de ratio de Sharpe ? ...

Constant Mix

Déf investir toujours une partie (proportion) λ de la valeur du portefeuille dans l'actif risqué (S_t).

Ex $\lambda \leq 1$ $\lambda \simeq 40\%, 50\%, 60\% \ldots$

Question est-ce une stratégie dynamique ? oui

Ex $100 \to 110 \to 120$ $V_0 = 1000$ € $\lambda = 1/2$ $t=0$ 500 € ss risque, 500 € risqué $=$ 5 actifs

S_0

$t=1$ 500 € $(r=0) \to$ 500 € (ss risque) $V_1 = 1050$ → 525 ss risque, → 525 risqué

5 actifs de valeur $5 \cdot 110 = 550$ $\frac{525}{110}$ actifs < 5.

Constant Mix

C'est une stratégie concave / contrarienne. Elle va à l'encontre de la tendance. Gains max si oscillations.

Evolution du portf. Const Mix

V_t = valeur $\frac{\lambda V_t}{S_t}$ = # parts actif risqué

$$dV_t = \frac{\lambda V_t}{S_t} dS_t + (V_t - \lambda V_t) r\, dt = \lambda V_t (\mu\, dt + \sigma\, dW_t) + (1-\lambda) r V_t\, dt$$

Donc
$$\frac{dV_t}{V_t} = \underbrace{\left(r + \lambda(\mu - r)\right)}_{\tilde{\mu}} dt + \underbrace{\lambda\sigma}_{\tilde{\sigma}}\, dW_t = \tilde{\mu}\, dt + \tilde{\sigma}\, dW_t$$

Sharpe : $\frac{\mu - r}{\sigma}$ = ratio de S_t.

Constant Mix

Comme suit $\lambda < 1$ cst diff de CPPI. Cst Mix est un CPPI ss plancher $\text{cst mix}(\lambda) = CPPI(m = \lambda, P_t \equiv 0)$.

Calcul de β de V_t : $\beta = \dfrac{cov(R_{V_t}, R_{S_t})}{var(R_{S_t})}$

$$= \frac{cov\left([r + \lambda(\mu - r)]\Delta t + \lambda\sigma \mathcal{N}_1(0,\Delta t),\ \mu\Delta t + \sigma \mathcal{N}_1(0,\Delta t)\right)}{Var(\mu \Delta t + \sigma \mathcal{N}(0,\Delta t))}$$

$$= \frac{\lambda \sigma^2 \Delta t}{\sigma^2 \Delta t} = \lambda < 1.$$ ss-exposé au marché.

TP: implémentation.

Trend following vs. contrarian strategies

Analyse 1: modèle de Black & Scholes: $dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dW_t$

Etudier la limite en $\lambda \to 0$: constater quel est le signe du "trend" (cf. formule analytique de S_t) par rapport au signe initial de ce trend.

Analyse 2: exponential Ornstein-Uhlenbeck

Soit $S_t = e^{U_t}$, $dU_t = (\theta_1 - \theta_2 U_t)dt + \theta_3 dW_t$.
autre formule : $dS_t/S_t = (\tilde{\theta}_1 - \theta_2 \ln(S_t))dt + \theta_3 dW_t$, $\tilde{\theta}_1 = \theta_1 + \theta_3^2/2$

- construire U_t par Euler-Maruyama, ensuite S_t
- tester les gains / pertes de $CM(\lambda = 0.5)$ vs $CPPI(m = 2, P = 0)$.

Analyse 3: données réelles

Tester le comportement de $CM(\lambda = 0.5)$ vs $CPPI(m = 2, P = 0)$ sur le CAC40 pendant une période de 5 ans, ou 10 ans ou 20 ans.

CM vs CPPI : résultats analyse 2

Exp(OU) : $S_t = e^{U_t}$, $dU_t = (\theta_1 - \theta_2 U_t)dt + \theta_3 dW_t$.
Résultats pour $\theta = (0, 20, 1)$, $V(0) = 1000$, $P = 0$: