

Stratégies dynamiques de portefeuille: (Stop-Loss), CPPI, Constant Mix

Master 2

Université Paris Dauphine

(c) 2019+

Gabriel Turinici

Référence générale :

livre "Éléments de Calcul Stochastique pour l'Évaluation et la Couverture des Actifs Dérivés – avec Exercices Corrigés, Travaux Pratiques et Études de Cas" de Imen Ben Tahar, José Trashorras, Gabriel Turinici

ISBN-13: 978-2340009998

- version papier <https://www.amazon.fr/gp/product/2340009995>
- version online <https://turinici.com>

CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance)

- Idée: nous avons une somme sous gestion V_t avec contrainte de toujours avoir au moins P_t en portefeuille.

- Éléments constitutifs :

Le portefeuille de valeur V_t

Le plancher de valeur P_t : souvent se comporte comme l'actif sans risque

Le coussin $C_t = V_t - P_t$

Le multiplicateur $m > 0$ (souvent > 1)

La partie investie en actifs risqués $X_t = mC_t$

La partie monétaire $M_t = V_t - X_t$

CPPI

Exemple numérique: $V_0 = 100$, $m = 5$, $P_0 = 90$, $r = 0$,

Scenario 1: $S_0 = 100$, $S_1 = 95$, $S_2 = 90$: OK

Scenario 2: $S_0 = 100$, $S_1 = 110$, $S_2 = 120$: OK

Scenario 3: $S_0 = 100$, $S_1 = 110$, $S_2 = 80$: pas OK

Conclusion: pour respecter le plancher il faut ré-allouer souvent avec un marché supposé continu.

Implémentation : histogramme du gain du portefeuille; comparaison avec P_t ; comparaison du rendement du coussin $\log(C_T/C_0)$ par rapport au rendement de S_t : $\log(S_T/S_0)$

CPPI

Rappels: CPPI

- Évolution du coussin ?

$$P_t = P_0 e^{rt} \quad C_t = ?$$

Portefeuille : P_t plancher ss risque
 C_t coussin, assigné

- Hypothèse sur l'actif risqué: Black-Scholes (log normal)

$$S_t : \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (\text{rdt log-normal})$$

$$\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} = \text{normale (dt petit)}$$

$$dC_t = ?$$

Question Rdt de C_t ? $\frac{C_{t+\Delta t} - C_t}{C_t} \sim N(\text{loi } \hat{r})$
 TP : loi normale.

CPPI

Théoriquement : comprendre acc.

$$V_t \geq P_t + C_t \quad dP_t = rP_t dt \quad (\text{hypothèse})$$

$$\hookrightarrow \text{portef. auto-financée} \quad V_t = M_t + X_t$$

$$[dV_t = rM_t dt + \frac{X_t}{S_t} dS_t = r(V_t - mC_t) dt + \frac{mC_t}{S_t} dS_t$$

$$[dV_t = dP_t + dC_t \cdot \text{Donc } dP_t + dC_t = r(V_t - mC_t) dt +$$

$$mC_t \frac{dS_t}{S_t} = r(P_t + C_t) dt - r m C_t dt + m C_t (\mu dt + \sigma dW_t)$$

$$\text{Donc } \frac{dC_t}{C_t} = \underbrace{[r + m(\mu - r)]}_{\hat{\mu}} dt + \underbrace{m\sigma}_{\hat{\sigma}} dW_t = \hat{\mu} dt + \hat{\sigma} dW_t$$

CPPI

Conclusion $\frac{dc_t}{c_t} = \tilde{\mu} dt + \tilde{\sigma} dW_t$ $\tilde{\mu} = r + m(\mu - r)$
 $\tilde{\sigma} = m\sigma$

c_t : actif Black-Scholes.

Ratio de Sharpe : $\frac{\tilde{\mu} - r}{\tilde{\sigma}} = \frac{r + m(\mu - r) - r}{m\sigma} = \frac{\mu - r}{\sigma}$

= ratio de Sharpe de $(S_t)_{t \geq 0}$

CPPI une sorte de produit dérivé ayant un delta de $\Delta_t = \frac{V_t}{S_t}$
 $= m(V_t - P_t) / S_t$

R₂ Stratégie de type "trend" (tendance) : plus l'actif monte plus on investit dessus.
 "convexe"

Constant Mix

Def invest toujours une partie (proportion) λ de la valeur du portefeuille dans l'actif risqué (S_t) .

Ex $\lambda \leq 1$ $\lambda = 40\%, 50\%, 60\% \dots$

Question : est-ce une stratégie dynamique ? OUI

Ex $t=0$ $100 \rightarrow 110 \rightarrow 120$ $V_0 = 1000 \text{ €}$ $\lambda = 1/2$ $t=0$ 500 € SS risqué
 S_t 500 € SS "actifs"

$t=1$ 580 € ($r=0$) $\rightarrow 580 \text{ €}$ (SS risqué) $V_1 = 1050 \rightarrow 525 \text{ SS risqué}$
 actifs de valeur $5 \cdot 110 = 550$ $\rightarrow 525 \text{ risqué}$
 $\frac{525}{110}$ actifs < 5 .

Constant Mix

c'est une stratégie concave/convexe, elle va à l'encontre de la tendance. Mais avec de oscillations.

Evolution du port. Const Mix

$$V_t = \text{valeur} \quad \lambda V_t = \# \text{ parts actif risqué}$$

$$dV_t = \lambda V_t \frac{dS_t}{S_t} + (V_t - \lambda V_t) r dt = \lambda V_t (\mu dt + \sigma dW_t) + (1-\lambda) r V_t dt$$

Donc

$$\frac{dV_t}{V_t} = \underbrace{(r + \lambda(\mu - r))}_{\tilde{\mu}} dt + \underbrace{\lambda \sigma}_{\tilde{\sigma}} dW_t = \tilde{\mu} dt + \tilde{\sigma} dW_t$$

Sharpe: $\frac{\mu - r}{\sigma} = \text{ratio de } S_t.$

Constant Mix

Comme $\lambda < 1$ c'est diff de CPPI. Cst Mix est un CPPI ss plancher $\text{Cst Mix}(\lambda) \geq \text{CPPI}(\lambda, P_t \geq 0).$

Calcul de β de V_t :

$$\beta = \frac{\text{cov}(R_{V_t}, R_{S_t})}{\text{var}(R_{S_t})}$$

$$= \frac{\text{cov}([r + \lambda(\mu - r)]\Delta t + \lambda\sigma V_t^{-1}(0, \Delta t), \mu\Delta t + \sigma V_t^{-1}(0, \Delta t))}{\text{var}(\mu\Delta t + \sigma V_t^{-1}(0, \Delta t))}$$

$$= \frac{\lambda\sigma^2 \Delta t}{\sigma^2 \Delta t} = \lambda < 1. \quad \text{ss-exposé au marché!}$$

TP: implémentation.

Trend following vs. contrarian strategies

Analyse 1: modèle de Black & Scholes: $dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dW_t$

Etudier la limite en $\lambda \rightarrow 0$: constater quel est le signe du "trend" (cf. formule analytique de S_t) par rapport au signe initial de ce trend.

Analyse 2: exponential Ornstein-Uhlenbeck

Soit $S_t = e^{U_t}$, $dU_t = (\theta_1 - \theta_2 U_t)dt + \theta_3 dW_t$.

autre formule : $dS_t/S_t = (\tilde{\theta}_1 - \theta_2 \ln(S_t))dt + \theta_3 dW_t$, $\tilde{\theta}_1 = \theta_1 + \theta_3^2/2$

- construire U_t par Euler-Maruyama, ensuite S_t
- tester les gains / pertes de $CM(\lambda = 0.5)$ vs $CPPI(m = 2, P = 0)$.

Analyse 3: données réelles

Tester le comportement de $CM(\lambda = 0.5)$ vs $CPPI(m = 2, P = 0)$ sur le CAC40 pendant une période de 5 ans, ou 10 ans ou 20 ans.

CM vs CPPI : résultats analyse 2

Exp(OU) : $S_t = e^{U_t}$, $dU_t = (\theta_1 - \theta_2 U_t)dt + \theta_3 dW_t$.

Résultats pour $\theta = (0, 20, 1)$, $V(0) = 1000$, $P = 0$:

