Projet méthodes numériques : TP

Gabriel Turinici

May 2022

1 Remarques préliminaires

A/ mettre partout des commentaires pour expliquer le code !!

B/ on n'utilise jamais des valeurs en "dur" (genre $a = 2$ et ensuite on utilise "2"; on utilisera "a" une fois attribué

C/ si possible faire référence aux formules du poly (numéro de formule ou page)

D/ l'ensemble du projet devrait être compréhensible par un collègue de M1

E/ le code python devrait être le plus soigné possible: pas de boucle "for" sauf vraiment indispensable, etc.

Le programme doit être exécutable sans aucune configuration ni intervention (attention aux librairies, etc).

Le programme doit avoir en commentaires le(s) nom(s) des auteur(s).

Toute feuille rendue doit porter le nom de l'auteur.

Il y a plusieurs projets au choix.

2 PROJET 1 : Stabilité du schéma de Heun (ATTENTION note max = 14/20 !!!)

Remarques : plus de théorie, moins de programmation, un peu de Tikz / python graphique

a/ rappeler le définition de la région de stabilité du schéma de Heun : voir poly (!!) (1/5 des points) b/ trouver une équation plus explicite pour la courbe frontière en fonction de la partie réelle x de z et de la partie imaginaire y (2/5 des points) c/ dessiner la région de stabilité prenant comme modèle les régions de stabilité présentées dans le poly (pour vous aider le code Tikz vous est fourni en section 5, par contre il faudrait utiliser des fonctions de dessin Tikz, en particulier pour les régions données par des fonctions paramétriques) (2/5 des points)

d/ Alternative (non préférée mais tolérée): utiliser un code python pour le dessin et sauvegarder comme pdf.

3 PROJET 2 : étude de convergence Crank-Nicholson pour système SEIR (ATTENTION note max=16/20)

Rq: un peu plus de programmation ...

Rappel : le système SEIR satisfait

$S' = -\beta SI/N$

$E' = \beta SI/N - \gamma_E E$

$I' = \gamma_E E - \gamma_I I$

$R' = \gamma_I I$

On peut prendre des paramètres similaires que pour SIR ($E(0) = 0$) avec $\beta = 1/3$, $\gamma_E = \gamma_I = 1/5$.

a/ résoudre, avec "odeint" (python) le système SEIR et dessiner les résultats (format du poly / TP)

b/ en utilisant un schéma de Crank-Nicholson dessiner la solution numérique et, sur un autre graphique, comparer les deux (numérique et "odeint"); attention à la résolution de l'équation implicite.

c/ démontrer empiriquement que l'ordre du schéma est 2

d/ Alternative à b/ (moins 2 points, note maximale=14/20 !!!) : utiliser à la place un schéma explicite tel que Heun ou RK d'ordre 4 (celui du poly / TP)

4 PROJET 3 : EDS : options barrière sur panier de 3 actions (note max= 20/20)

Soit W_t, B_t, Z_t trois mouvements browniens indépendants partant de 0 et S, U, V trois actifs financiers satisfaisant des modèles de Black-Scholes ayant les mêmes $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.2$ et $r = 0.05$.

Il s'agit de calculer des propriétés statistiques des options à barrière à sous-jacents multiples, plus précisément on veut calculer le premier temps quand un des actifs touche une des barrières activantes/desactivantes (voir ci-dessous)

Paramètres (comme dans le TP) : $N = 255$, $T = 1$, $M = 300$; pour rappel $dt = T/N$; barrières : $b1 = (0.8, 1.1)$, $b2 = (0.9, 1.2)$, $b3 = (0.8, 1.2)$,

1/ simuler W_t, B_t et Z_t comme dans le TP

2/ appliquer un schéma de Milshtein pour simuler S, U, V.

3/ calculer pour chaque réalisation le PREMIER temps τ quand : $S(t)/S(0) = b1[0]$ ou $S(t)/S(0) = b1[1]$ ou pareil pour U p/r/ à $b2$ et V p/r à $b3$

Attention: il n'y a pas trois temps, c'est le premier temps tout court, peu importe quel actif l'a réalisé !

4/ dessiner l'histogramme de ce temps τ

5/ refaire les points précédents pour dt deux fois plus petit et comparer, sur le même plot, les deux histogrammes afin de garantir la convergence; s'il y a trop de différence entre les histogrammes alors utiliser un dt encore plus petit, jusqu'à convergence (si besoin faire aussi M plus gros)

6/ Alternative à 5/ : utiliser un test statistique à la place de l'histogramme

5 Annexe pour projet 1: example de code Tikz

```
\documentclass[tikz, border=1mm]{standalone}
\begin{document}
\begin{tikzpicture}[scale=0.5]
\fill[red!30] (-3, -2) rectangle (3,2);
\filldraw[fill=green!30, draw=black, very thick] (-1,0) circle  [radius=1];
\draw[->,ultra thick] (-3,0)--(3,0) node[above]{$Re(z=\lambda h)$};
\draw[->,ultra thick] (0,-2)--(0,2) node[right]{$Im(z = \lambda h)$};
\node (B) at (-1,.25) {$-1$};
\filldraw[fill=black,draw=black, very thick] (-1,0) circle  [radius=.1];
\end{tikzpicture}
%
\begin{tikzpicture}[scale=0.5]
\fill[green!30] (-3, -2) rectangle (3,2);
\filldraw[fill=red!30, draw=black, very thick] (1,0) circle  [radius=1];
\draw[->,ultra thick] (-3,0)--(3,0) node[above]{$Re(z=\lambda h)$};
\draw[->,ultra thick] (0,-2)--(0,2) node[right]{$Im(z = \lambda h)$};
\node (B) at (1,.4) {$1$};
\filldraw[fill=black,draw=black, very thick] (1,0) circle  [radius=.1];
\end{tikzpicture}
%
\begin{tikzpicture}[scale=0.5]
\fill[green!30] (-3, -2) rectangle (0,2);
\fill[red!30] (0, -2) rectangle (3,2);
\draw[->,ultra thick] (-3,0)--(3,0) node[above]{$Re(z=\lambda h)$};
\draw[->,ultra thick] (0,-2)--(0,2) node[right]{$Im(z = \lambda h)$};
\end{tikzpicture}
\end{document}
```