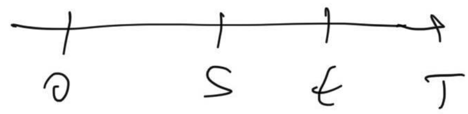
Modèles de taux

G. Turinici

cours 1 ISF app et MASEF 2020/21

$$L_t = \mathbb{E}(L_T|\mathcal{F}_t)$$



$$\mathbb{E}(L_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(L_T|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s\right) \underset{\text{de l'esp. cond}}{\overset{\text{par prop.}}{=}} \mathbb{E}(L_T|\mathcal{F}_s)$$

$= L_s.$

$$\frac{dL_t}{L_t} = ?\,dt + ?\,dW_t$$

(à partir de 1.29). Comparer avec formule (1.21)

Modèle de Heston

Exo 7.1.2. Euler-Maruyama pour (7.7)

$$Y_{n+1} = Y_n + (\alpha - \beta V_n)\cdot\Delta t + \gamma\sqrt{V_n}\,\Delta W_n \qquad Y_n \simeq X(t_n)$$

$$V_{n+1} = V_n + (a - b V_n)\cdot\Delta t + \sigma\sqrt{V_n}\,\Delta B_n \qquad V_n \simeq v(t_n)$$

$$t_{n+1} - t_n = \Delta t$$

$\Delta W_n, \Delta B_n \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ $\quad cor(\Delta W_n, \Delta B_n) = \rho$

simulation $G_1, G_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\quad \Delta W_n = \left(\rho G_1 + \sqrt{1-\rho^2}\, G_2\right)$

$\Delta B_n =$

Cours 1 demonstration (1.37)

$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}(X|\mathcal{F}_t)$ a la propriété (qui la définit) :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}\left(U\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}(X|\mathcal{F}_t)\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}(XU) \quad \forall U \hat{\in} \mathcal{F}_t$$

Mais $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}(XU) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}(L_T X U)$

Par ailleurs

donc égalité $\forall U \hat{\in} \mathcal{F}_t$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}\left(U\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}(X|\mathcal{F}_t)\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}\left(L_t U \mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}(X|\mathcal{F}_t)\right)$$

Donc $\forall U \hat{\in} \mathcal{F}_t$: $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}(L_T X U) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}\left(L_t U\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}(X|\mathcal{F}_t)\right)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}[L_T X|\mathcal{F}_t) = L_t \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}(X|\mathcal{F}_t).$$

$B(t,T) \times B(T,U) = B(t,U) \quad \forall t \leq T \leq U.$

Si tx = déterministe et constant si portef vaut x en $t=0$ il vaudra $x e^{rt}$ à l'instant t [investi ds produit ss risque de tx "r").

Dans ce cas $\underline{B(t,T)} = e^{-r(T-t)} = \exp\left(-\int_t^T r\,dt\right)$

Intuition sur formule de Black

Si $\frac{dX_t}{X_t} = \sigma_t dW_t$ avec σ cst, déterministe, connu alors

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\{(X_T-K)_+ \mid \mathcal{F}_t\} = X_t \Phi(d_1) - K\Phi(d_2)$$

avec $d_1 =$ (cf formule 3.34) $= \dfrac{\ln(X_t/K) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$.

Ceci est une conséquence de la loi normale / log-normale.

QUESTION Que se passe si σ n'est plus constante, voir n'est plus déterministe ?

Dans ce cas on utilise la proposition suivante :

Prop Soit $\Theta_t = \int_0^t \xi_s dW_s$ avec ξ $(\mathcal{F})$-adapté, W = Brownien, donc Θ_t = martingale (locale). Alors il existe un mvt. Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ tel que $\Theta_t = B_{\underbrace{\int_0^t \xi_s^2 ds}_{\text{« pseudo temps »}}} = \int_0^t \xi_s dW_s$

Cas particulier ① ξ = déterministe Alors $\int_0^t \xi_s dW_s = B_{\theta_t}$ avec $\underbrace{\theta_t = \int_0^t \xi_s^2 ds}_{\text{déterministe}}$.

$\xi = 1$: $\int_0^t 1\, dW_s = B_{\int_0^t 1^2 ds} \Leftrightarrow W_t = B_t$

$\xi = 3$ $\quad 3W_t = \int_0^t 3W_s = B_{\int_0^t 9 ds} = B_{9t}$

ξ grand $\Leftrightarrow$ plus d'incréments $\Leftrightarrow$ temps plus long.

$3\underbrace{W_1 - W_1}_{\mathcal{N}(0,1)} \sim 3\mathcal{N}(0,1) \sim \mathcal{N}(0,9)$

② ξ pas déterministe : le temps $\underbrace{\int_0^t \xi_s^2 ds}$ change de manière « aléatoire » dépendant du chemin parcouru.

Preuve par la caractérisation de Levy.

Cours 5 17, modèle LGM

Exo Montrer que X_t est v.a. gaussienne.

$$dX_t = (\Phi_t - \lambda X_t)\,dt + \sigma_t\,dW_t \qquad \Phi_t = \int_0^t \sigma(s,t)^2\,ds.$$

1°) $X_t = r_t - f(0,t) = f(t,t) - f(0,t) = \int_0^t df(u,t)$

$$= \underbrace{\int_0^t -\sigma(u,t)\,\Gamma(u,t)\,du}_{\text{dét}} + \underbrace{\int_0^t \sigma(u,t)\,dW}_{\substack{\text{intégrale}\\ \text{gaussienne}\\ \text{car } \sigma = \text{dét.}}}$$

Donc $X_t \sim \mathcal{N}(\ldots,\ldots)$.

2°) 2e idée Ito pour $\underbrace{e^{\lambda t} X_t}_{} = Y_t$ $\quad dY_t = \lambda e^{\lambda t} X_t +$

$$e^{\lambda t} dX_t = e^{\lambda t}(dX_t + \lambda X_t) = e^{\lambda t}\big(\underbrace{\Phi_t\,dt + \sigma_t\,dW_t}_{\substack{\text{intégrale gaussienne}\\ \text{car } \sigma, \Phi = \text{dét}}}\big).$$

3°) Euler-Maruyama Not $U_n \simeq X(n\cdot\Delta t)$

$$U_{n+1} = U_n + (\Phi_{t_n} - \lambda U_n)\cdot\Delta t + \sigma_{t_n}\underbrace{(W_{t_{n+1}} - W_{t_n})}_{\sqrt{\Delta t}\,\mathcal{N}(0,1)}$$

Si U_n = gaussienne alors nous avons la somme de 2 gaussiennes indép $U_n + (\Phi_{t_n} - \lambda U_n)\Delta t \perp\!\!\!\perp$ $\sigma_{t_n}(W_{t_{n+1}} - W_{t_n})$, donc U_{n+1} = gaussienne.

Par ailleurs on obtient pour $m_t = \mathbb{E}(X_t)$: $m_t' = (\Phi_t - \lambda m_t)$.

(peut aussi se justifier avec Euler-Maruyama).

$$\mathrm{cov}(X_t, X_s) = \mathrm{cov}\Big(\int_0^t \cdots du + \int_0^t \cdots dW_u,\ \int_0^s \cdots du + \int_0^s \cdots dW_v\Big) = \int_0^{\min(s,t)} (\cdots)^2\,du$$

Modèle BGM (§5)

Exo $\vec{z}_t$: d-Brownien (Brownien en dim d)

$\vec{z}_t = (z_t^1, \dots, z_t^d)$ avec z_t^i = Browniens standard indépendants.

A montrer pour $\beta \in \mathbb{R}^d$ $\|\beta\|=1$

1) $\beta \cdot \vec{z}_t$ = Brownien en dim 1.

2) Si $\tilde{\beta} \in \mathbb{R}^d$ $\|\tilde{\beta}\| = 1$ alors la corrélation entre $\beta\, d\vec{z}_t$ et $\tilde{\beta}\, d\vec{z}_t$ est $\langle \beta, \tilde{\beta} \rangle$.

(1) $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ $\underbrace{U_t = \beta \cdot \vec{z}_t}_{\text{proc Gaussien}} = \sum_{i=1}^d \beta_i z_t^i$

$$\langle U_t, U_t \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^d \beta_i z_t^i, \sum_{l=1}^d \beta_l z_t^l \right\rangle = \sum_{i,l=1}^d \beta_i \beta_l \underbrace{\langle z_t^i, z_t^l \rangle}_{\substack{0 \text{ si } i \neq l \\ t \text{ si } i=l}}$$

$$= t \sum_{i=1}^d \beta_i^2 = t\|\beta\|^2 = t \quad \text{car } \|\beta\| = 1$$

(2) Corr entre increments (ex de 0 à t) donc corrélation entre les v.a. $\beta \cdot \vec{z}_t$ et $\tilde{\beta} \cdot \vec{z}_t$

$$\mathrm{CoV}(\beta \vec{z}_t, \tilde{\beta} \vec{z}_t) = \mathrm{Cov}\left(\sum \beta_i z_t^i, \sum \tilde{\beta}_l z_t^l\right)$$

$$= \sum_{i,l=1}^d \beta_i \tilde{\beta}_l \underbrace{\mathrm{CoV}(z_t^i, z_t^l)}_{\substack{0 \text{ si } i \neq l \\ t \text{ si } i=l}} = t \sum_i \beta_i \tilde{\beta}_i = t \langle \beta, \tilde{\beta} \rangle.$$

Alors la corrélation $\mathrm{Cor}(\dots) = \dfrac{\mathrm{CoV}(\beta \cdot \vec{z}_t, \tilde{\beta} \vec{z}_t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\beta \cdot \vec{z})\, \mathrm{Var}(\tilde{\beta} \cdot \vec{z})}} =$

$\langle \beta, \tilde{\beta} \rangle$.

Modèle SABR, Exo 6 2.1 p61, Item 2

$$\begin{cases} F_{n+1} = F_n + \alpha_n \cdot F_n^{\beta}\, \Delta W_n \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha_n \cdot \nu \cdot \Delta B_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta W_n \sim \sqrt{h}\, \mathcal{N}(0,1) \\ \Delta B_n \sim \sqrt{h}\, \mathcal{N}(0,1) \end{cases} \qquad \mathrm{cor}(\Delta W_n, \Delta B_n) = \rho$$

Ex $G', G \sim \mathcal{N}(0,1)$, $G' \perp\!\!\!\perp G$. $\Delta W_n = \sqrt{h}\, G$

$\Delta B_n = \sqrt{h}\left(\rho G + \sqrt{1-\rho^2}\, G'\right)$

Question $\alpha_n > 0$? $F_n > 0$?

$\alpha_{n+1} = \alpha_n (1 + \nu \Delta B_n)$, pas necess^t + !

$F_{n+1} = F_n (1 + \alpha_n F_n^{\beta-1} \Delta W_n)$, pas tjs positif !

Comment faire ? → utiliser des eq type CIR.

→ remplacer par le module

→ écrire des éq pour le log

$\alpha_t = e^{\underbrace{\ln(\alpha_t)}_{A_t}}$ $F_t = e^{\underbrace{\ln(F_t)}_{B_t}}$ $\alpha_t = e^{A_t}$ $F_t = e^{B_t}$

$A_t = \ln \alpha_t$

$$\begin{cases} dA_t = (\dots)dt + (\ )dB_t \\ dB_t = (\ )dt + (\ )dW_t \end{cases}$$ ← Euler Maruyama.

Exo 6.3.1 page 62

$K \to F_0$ $\ln(F_0/K) \to 0$. Le 2^e terme → 1.

$\sqrt{KF_0} \to F_0$.

Il reste seulement $\frac{y}{\xi(y)}$. Ici $y \to 0$ On doit donc

étudier $\lim_{y\to 0} \frac{y}{\xi(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln\left(\frac{\sqrt{1-2\rho y + y^2} - \rho + y}{1-\rho}\right)}$

$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\frac{\sqrt{1-2\rho y + y^2} - \rho + y}{1-\rho} - 1}$

$\ln(1+x) = x + O(x^2)$

$\ln(☺) = (☺ - 1) + O\left((☺-1)^2\right)$

$= \lim_{y\to 0} \frac{y(1-\rho)}{\sqrt{1-2\rho y+y^2} - \cancel{\rho} + y - 1 + \cancel{\rho}} = \lim_{y\to 0} \frac{y(1-\rho)}{\sqrt{1-2\rho y + y^2} - (1-y)} = \dots = 1.$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Exo 7.1.2. $\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + (\alpha - \beta V_n)\Delta t + \Delta W_n \cdot \delta \sqrt{V_n} \\ V_{n+1} = V_n + (a - b V_n)\Delta t + \sigma \sqrt{V_n}\, \Delta B_n \end{cases}$

avec ΔW_n, $\Delta B_n \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$, de corrélation "$\rho$".

$\Delta W_n = \left(\rho G_1 + \sqrt{1-\rho^2}\, G_2\right)\sqrt{\Delta t}$ avec $G_1, G_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\Delta B_n = G_1 \sqrt{\Delta t}$

Pb de positivité pour $V_{n+1} > 0$! Il se peut que $V_{n+1} < 0$.

Dans ce cas → soit on met $V_{n+1} = (V_{n+1})_+$ et on vérifie si Δt n'est pas trop grand

→ soit on utilise un schéma numérique adapté au modèle CIR.

Examen : matière : tout fait en cours (souligné sur le poly).

Regarder exo faits ~~en~~ lors des cours

| Léa Rinai : les objets du raisonnement