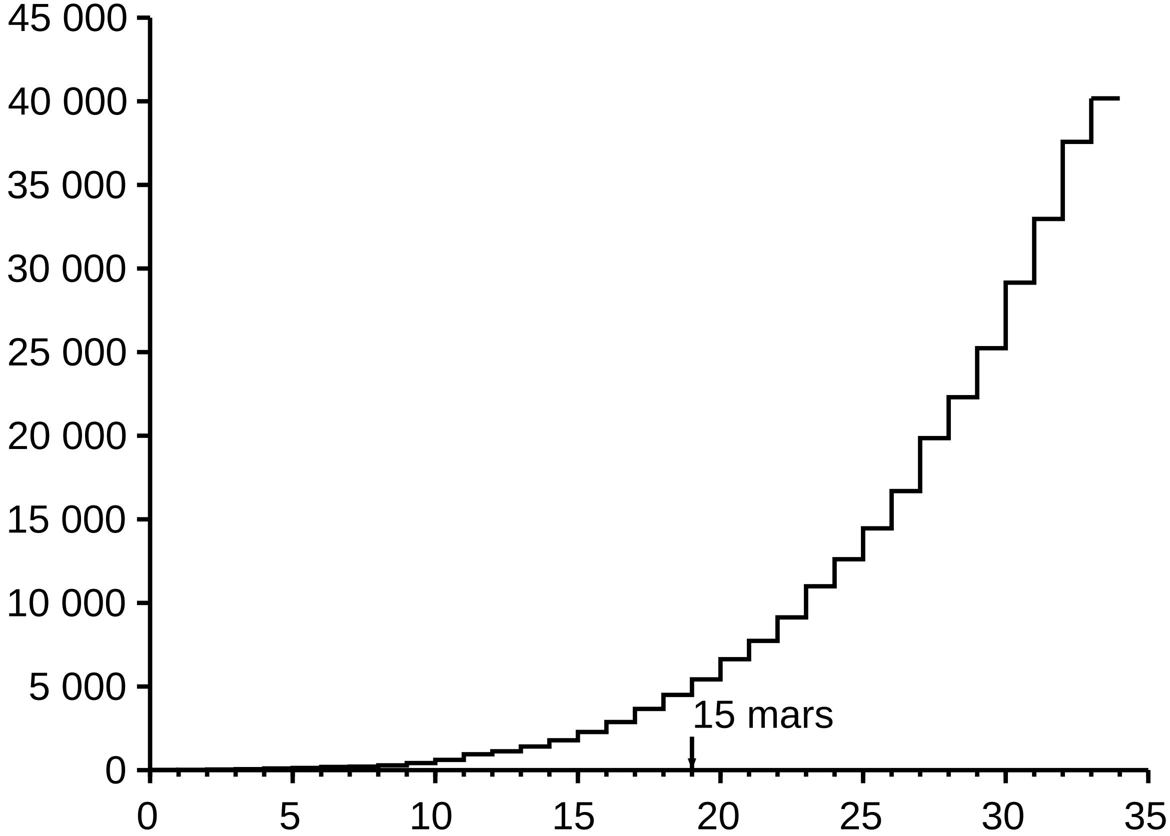
Un modèle mathématique pour les débuts de l'épidémie de coronavirus en France

Nicolas Bacaër

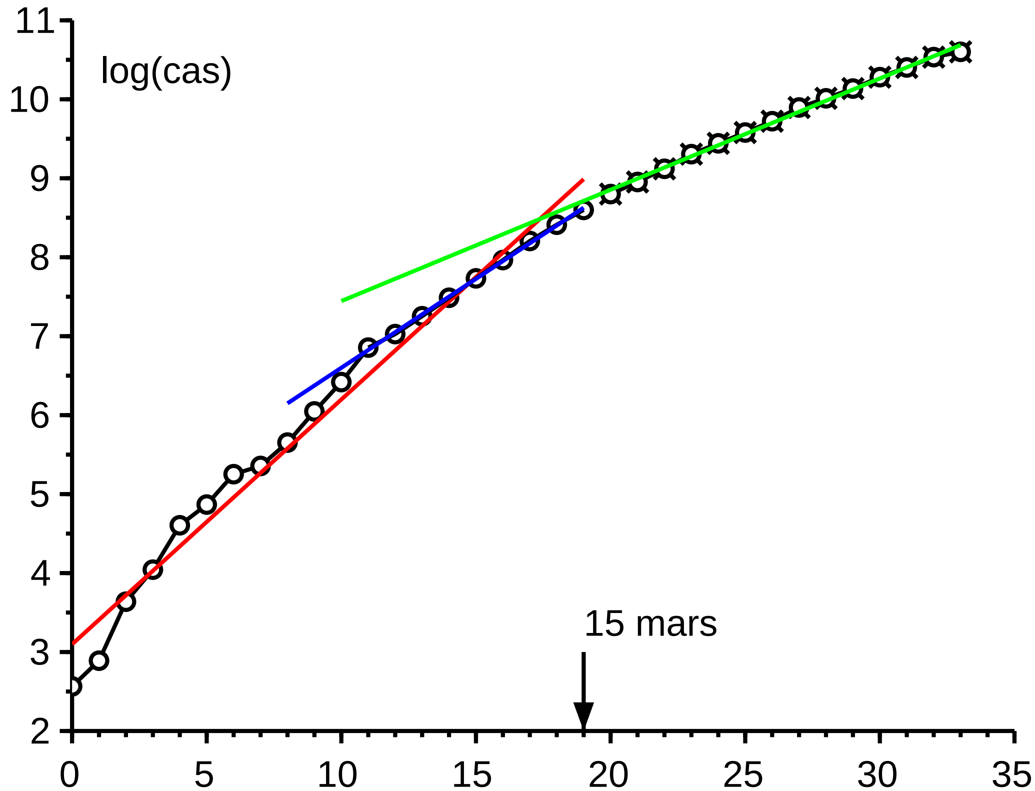
Institut de recherche pour le développement

09/04/2020

nombre de cas détectés (25/02 $\rightarrow$ 29/03)



logarithme du nombre de cas détectés



croissance $e^{\lambda t}$, $\lambda \simeq 0,225$ /jour

Modèle

$$N = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -a\,S\,\frac{I}{N} \\
\frac{dE}{dt} &= a\,S\,\frac{I}{N} - b\,E \\
\frac{dI}{dt} &= b\,E - c\,I \\
\frac{dR}{dt} &= c\,I,
\end{aligned}$$

remarque : $\frac{1}{S}\frac{dS}{dt} = -a\frac{I}{N} = -\frac{a}{cN}\frac{dR}{dt}$

Au début, $S(t) \simeq N$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} E \\ I \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -b & a \\ b & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ I \end{pmatrix}$$

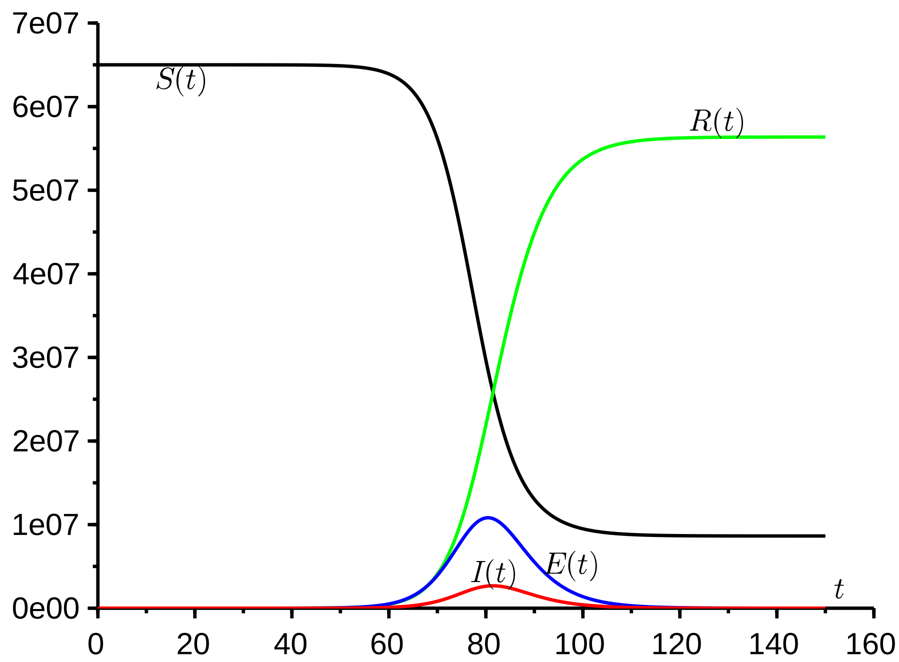
$$\lambda = \frac{-(b+c)+\sqrt{(b-c)^2+4ab}}{2}$$

$$a = (\lambda + c)\left(1+\frac{\lambda}{b}\right)$$

reproductivité : $\mathcal{R}_0 = \frac{a}{c} \simeq 2{,}3$

Sans intervention, la taille finale est

$$\frac{R(\infty)}{N} \simeq 1 - \exp\left(-\mathcal{R}_0 \, \frac{R(\infty)}{N}\right) \simeq 87\%$$



1[er] scénario : $a = 0$ pour $t > T$

$$R(\infty) = E(T) + I(T) + R(T)$$

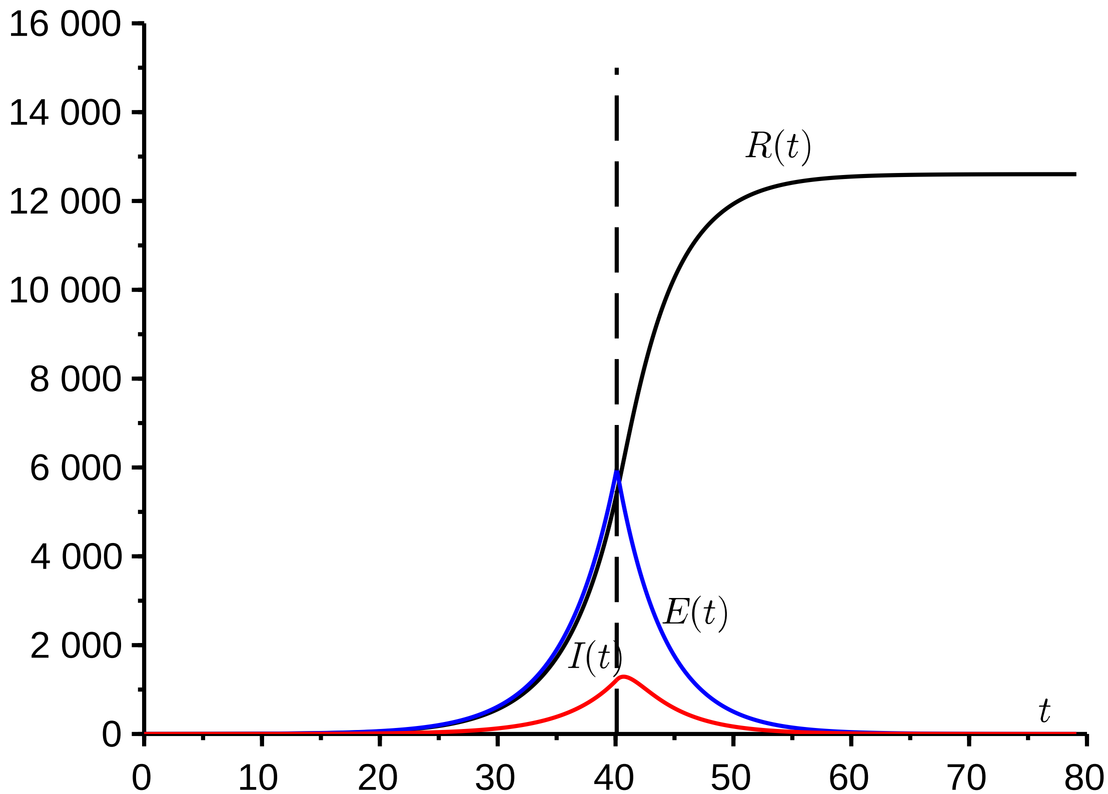
T ni trop petit, ni trop grand :

$$\frac{d}{dt}(E + I + R) = a\,S\,\frac{I}{N} \simeq a\,I = \mathcal{R}_0 \frac{dR}{dt}$$

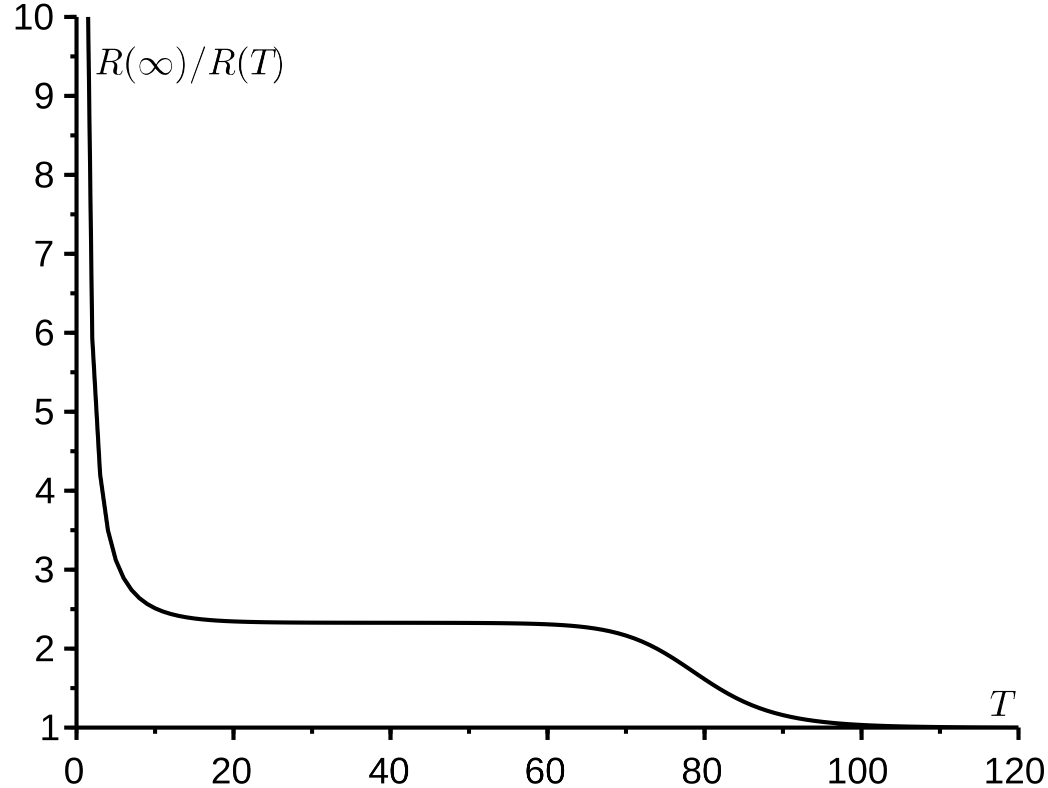
$$E(T) + I(T) + R(T) \simeq \mathcal{R}_0\,R(T)$$

$$R(\infty) \simeq \mathcal{R}_0\,R(T)$$

Exemple : $R(T) \simeq 5400$



T ni trop petit, ni trop grand :



2$^{\text{e}}$ scénario : T moyen, $t > T$:

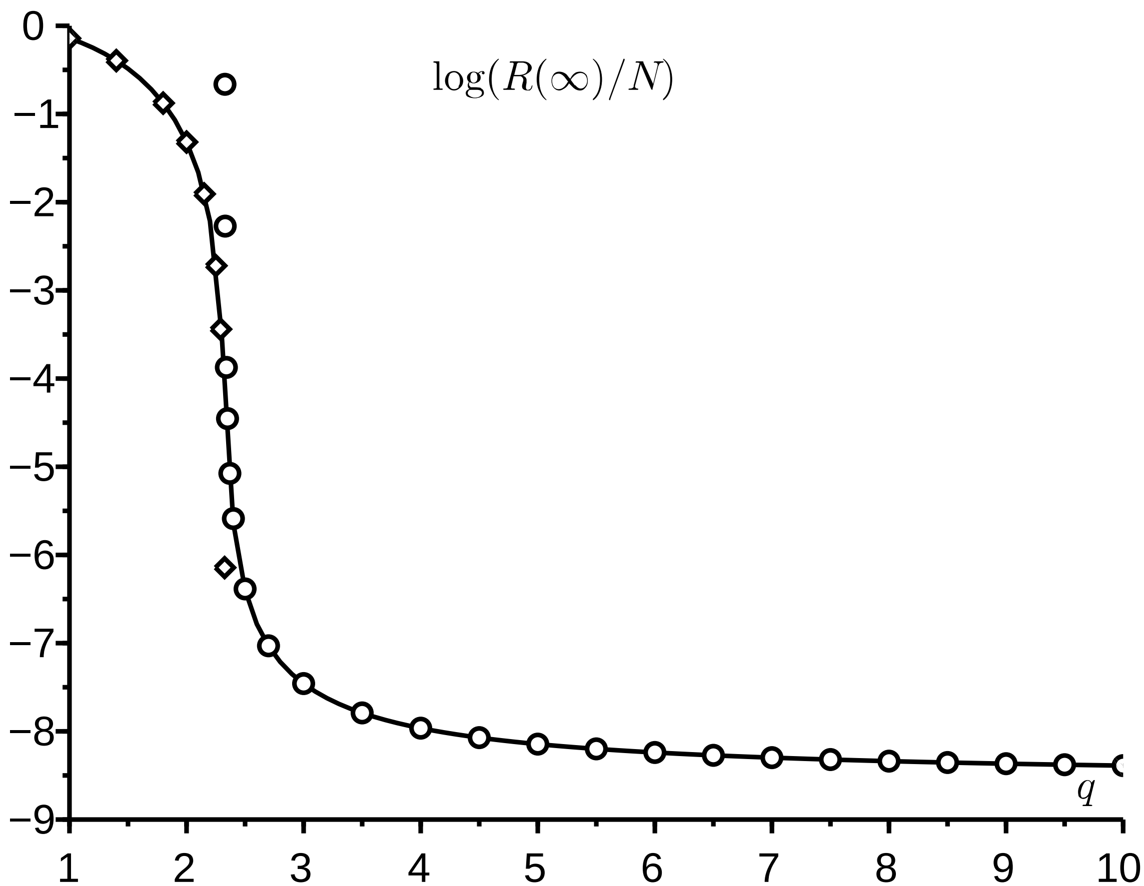
$$\frac{dS}{dt} = -\frac{a}{q} S \frac{I}{N}, \qquad \frac{dE}{dt} = \frac{a}{q} S \frac{I}{N} - b\, E, \qquad \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{R(\infty)}{N} = 1 - \frac{S(T)}{N} \exp\left(-\frac{\mathcal{R}_0}{q}\, \frac{R(\infty) - R(T)}{N}\right)$$

$$q < \mathcal{R}_0 \Rightarrow \frac{R(\infty)}{N} \simeq 1 - \exp\left(-\frac{\mathcal{R}_0}{q} \frac{R(\infty)}{N}\right)$$

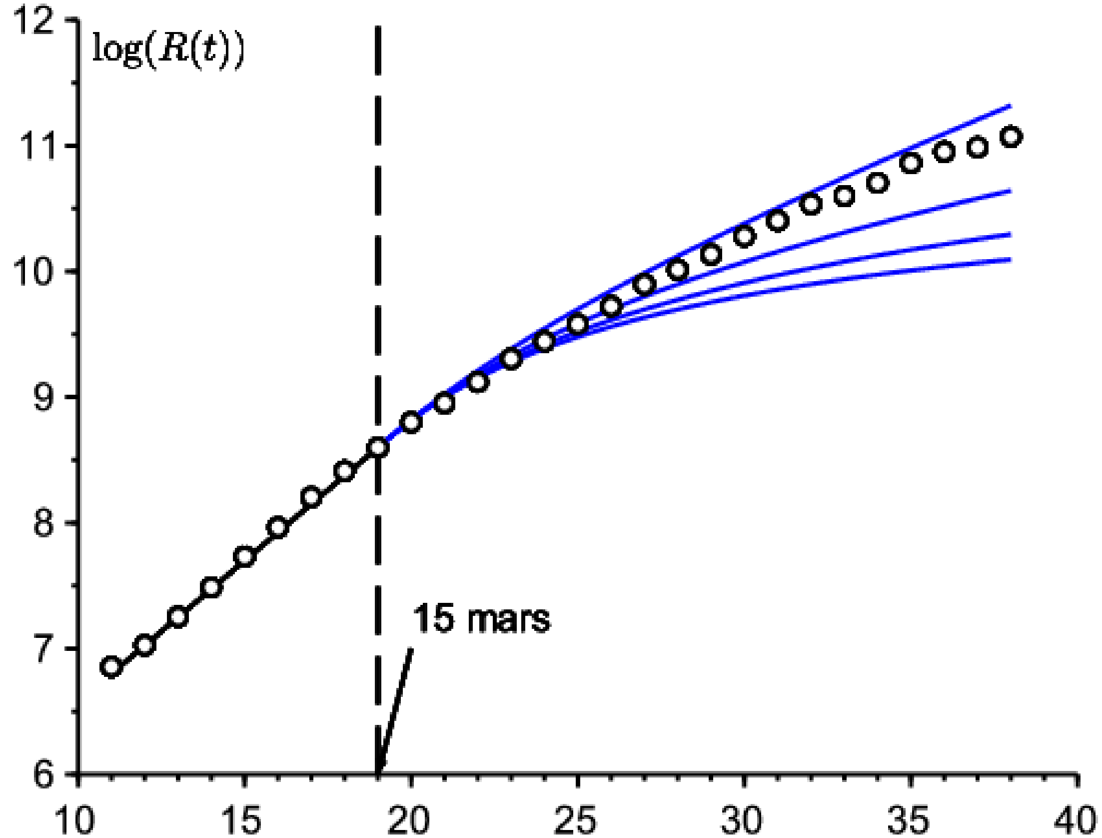
$$q > \mathcal{R}_0 \;\Rightarrow\; S(T) \simeq N - \mathcal{R}_0 R(T)$$

$$\Rightarrow \boxed{R(\infty) \simeq R(T)\, \mathcal{R}_0 \frac{1 - 1/q}{1 - \mathcal{R}_0/q}}$$



$\log(R(\infty)/N)$
q
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

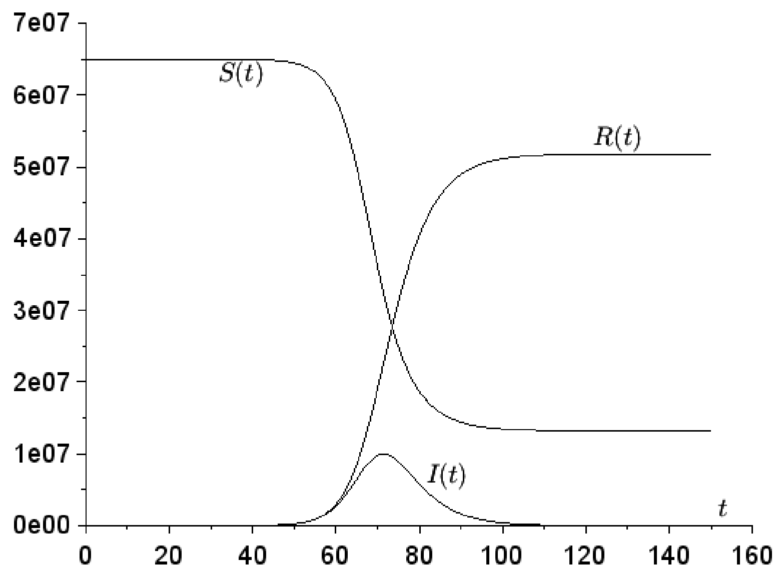
$q \in \{1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 3\}$



Remarque sur le modèle S-I-R

$$\frac{dS}{dt} = -a\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a\frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI$$

$$S(0) = N - 1, \quad I(0) = 1, \quad R(0) = 0$$



pic de l'épidémie $t = \tau$

$$\tau = \frac{1}{a}\int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{s\left(1 - s + \frac{b}{a}\log[s/(1-1/N)]\right)}$$

$$\boxed{\tau \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{\log N}{a-b}}$$

Un modèle mathématique des débuts de l'épidémie de coronavirus en France
`https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02509142`

Sur le pic épidémique dans un modèle S-I-R
`https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02518993`

disponibles en [ar, de, es, it, ja, nl, pt, ru, zh]

Merci pour votre attention !